

Uma Análise sobre a Constante Cosmológica

Marina von Steinkirch

26 de novembro de 2007

Resumo

A Relatividade Geral tem sido a teoria mais adequada para a descrição dos fenômenos gravitacionais em escala astrofísica. Ela é aplicada com sucesso em uma vasta classe de situações, desde a descrição de estrelas isoladas, até a cosmologia (que lida com as maiores distâncias possíveis observadas). Uma das questões mais importantes na cosmologia contemporânea envolve a possível existência de uma constante cosmológica nas equações de Einstein.

A constante cosmológica (λ) foi proposta por Albert Einstein como uma modificação da teoria original da Relatividade Geral para implementar um universo estacionário (eterno e imutável). Ela é um termo que equilibra a força de atração da gravidade tomando a forma de uma força gravitacional repulsiva. Foi adicionada quase como uma "constante de integração" às equações de Einstein. Após a descoberta do deslocamento para o vermelho (*redshift*), por Edwin Hubble em 1929, e a introdução do paradigma do universo em expansão, Einstein abandonou o conceito declarando que teria sido o pior erro de sua carreira.

Hoje em dia, com a descoberta da expansão acelerada do universo, na década de 1990, implicando em uma λ diferente de zero, renovou-se o interesse na constante cosmológica, de forma que ela aparece nas equações de campo modificadas de Einstein como um fator que tem o mesmo efeito de uma densidade de energia intrínseca do vácuo.

Esse trabalho tem como objetivo introduzir os conceitos matemáticos da Relatividade Geral, e em seguida, aplicá-los no desenvolvimento das equações de Einstein e na inclusão da constante cosmológica, ressaltando as implicações nos modelos cosmológicos vigentes.

Sumário

1	Advertência	2
2	Introdução à Relatividade Geral	3
2.1	Relatividade Restrita	3
2.1.1	As Transformações de Lorentz	3
2.1.2	Energia e Momento	4
2.1.3	Densidades de Corrente e de Cargas	5

2.1.4	Eletrodinâmica	6
2.2	Tensor Energia-Momento	7
2.2.1	Spin	10
2.3	Análise Tensorial	10
2.3.1	Vetores e Tensores	10
2.3.2	A Conexão Afim (Affine Connection)	11
2.3.3	Derivada Covariante	12
2.3.4	Derivadas Covariantes: Gradiente, Rotacional e Divergente	13
2.4	O Princípio de Equivalência	14
2.4.1	A Formulação do Princípio de Equivalência	14
2.4.2	Forças Gravitacionais	15
2.4.3	O Limite Newtoniano	16
2.5	Curvatura	18
2.5.1	Definição do Tensor de Curvatura	18
2.5.2	Propriedades Algébricas de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$	19
2.5.3	As Identidades de Bianchi	20
3	As Equações de Einstein	20
3.1	Derivação das Equações de Campo	20
3.2	Teoria de Brans-Dike	24
3.3	Condições de Coordenadas	27
3.4	O Problema de Cauchy	29
4	O Modelo Padrão da Cosmologia	30
4.1	O Princípio Cosmológico	30
4.2	A Métrica Robertson-Walker	31
4.3	O <i>Redshift</i>	32
4.4	Contagem de números de fontes no Universo	34
4.5	O Estado Cosmológico Estacionário	35
4.6	O Modelo Padrão da Cosmologia e seus Dilemas	36
5	A Constante Cosmológica	38
5.1	O Problema da Falta de Energia no Universo	38
5.2	Modelos com uma Constante Cosmológica	41
5.3	Constante Cosmológica Forte - Modelo de De Sitter	45
5.4	Constante Cosmológica Fraca	47
5.5	Outros Modelos: Lemaître e Eddington-Lemaître	47
5.6	Qual é o modelo (a equação de estado) do universo?	48
6	Conclusão	48

1 Advertência

O seguinte capítulo, *Introdução à Relatividade Geral*, (capítulo **2**), fornece a base instrumental para o estudo das *Equações de Einstein* (capítulo **3**), do *Modelo Padrão da Cosmologia* (capítulo **4**) e, finalmente, do desenvolvimento

de *Constante Cosmológica* (capítulo 5), de forma que os tópicos escolhidos em 2 estão diretamente relacionados com as citações e os raciocínios desenvolvidos em 3, 4 e 5. Todos esses quatro capítulos são baseados em [1].

Finalmente, o capítulo final, *Conclusão*, (capítulo 6) tece uma ampla análise sobre a Constante Cosmológica e os modelos cosmológicos, envolvendo várias outras referências.¹

2 Introdução à Relatividade Geral

2.1 Relatividade Restrita

2.1.1 As Transformações de Lorentz

O princípio da relatividade restrita afirma que as leis da natureza são invariantes sob um grupo de transformações de coordenadas do espaço-tempo, chamadas de transformações de Lorentz. Essas caracterizam-se por uma mudança de um sistema de coordenadas do espaço-tempo x^α para outro sistema x'^α , tal que

$$x'^\alpha \equiv \lambda_\beta^\alpha x^\beta + a^\alpha \quad (1)$$

onde a^α e λ_β^α são constantes, restritas às condições

$$\lambda_\gamma^\alpha \lambda_\delta^\beta \eta_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\gamma\delta} \quad (2)$$

com

$\eta_{\alpha\beta} = +1$	$\alpha = \beta = 1, 2 \text{ ou } 3$
$\eta_{\alpha\beta} = -1$	$\alpha = \beta = 0$
$\eta_{\alpha\beta} = 0$	$\alpha \neq \beta$

Os índices gregos tomam valores de 1,2,3 (coordenadas cartesianas) e 0 (coordenada temporal) e, usando unidades naturais (tal que a velocidade da luz é igual a um), tem-se que x^α tem dimensão de comprimento. Qualquer índice que aparecer repetido na forma covariante (embaixo) e contravariante (em cima) é entendido como uma soma (notação de Einstein). Como por exemplo, a equação (1) não contraída:

$$x'^\alpha = \lambda_0^\alpha x^0 + \lambda_1^\alpha x^1 + \lambda_2^\alpha x^2 + \lambda_3^\alpha x^3 + a^\alpha \quad (3)$$

Uma outra importante propriedade é a invariância do tempo próprio $d\tau$, definida por

$$d\tau^2 \equiv dt^2 - dx^2 = -\eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \quad (4)$$

Em um novo sistema de coordenadas x'^α , as coordenadas diferenciais são

¹Esse trabalho está no sistema natural de unidades, onde a velocidade da luz é 1.

$$dx'^{\alpha} \equiv \lambda_{\gamma}^{\alpha} dx^{\gamma} \quad (5)$$

e o tempo próprio neste novo sistema

$$\begin{aligned} d\tau^2 &= -\eta_{\alpha\beta} dx'^{\alpha} dx'^{\beta} \\ &= -\eta_{\alpha\beta} \lambda_{\gamma}^{\alpha} \lambda_{\theta}^{\beta} dx^{\gamma} dx^{\theta} \\ &= -\eta_{\gamma\theta} dx^{\gamma} dx^{\theta} \end{aligned} \quad (6)$$

tem-se portanto

$$d\tau^2 = dt^2 \quad (7)$$

Por fim, a velocidade da luz é constante em todos os referenciais inerciais, de forma que seu tempo próprio é sempre zero.

2.1.2 Energia e Momento

Na forma quadrivetorial, pode-se definir o quadrivetor energia-momento como

$$p^{\alpha} \equiv m \frac{dx^{\alpha}}{d\tau} \quad (8)$$

De forma que a segunda lei de Newton fica

$$\frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = f^{\alpha} \quad (9)$$

Mas da equação (4) tem-se que

$$d\tau \equiv (dt^2 - dx^2)^{\frac{1}{2}} = (1 - v)^{\frac{1}{2}} dt \quad (10)$$

onde $\mathbf{v} \equiv \frac{dx}{dt}$. Logo, as componentes espaciais de p^{α} são na forma do vetor

$$\mathbf{p} = m\gamma\mathbf{v} \quad (11)$$

A componente no tempo é a própria energia

$$p^0 = E = m\gamma \quad (12)$$

Onde γ é o fator de Lorentz dado por

$$\gamma \equiv \frac{dt}{d\tau} = (1 - v)^{-\frac{1}{2}} \quad (13)$$

Manipulando-se (11) e (12), elimina-se a velocidade, de forma que se obtém a relação entre energia e momento

$$E(p) = (p^2 + m^2)^{\frac{1}{2}} \quad (14)$$

A razão de (11) e (12) dá a útil relação para todas as partículas:

$$\frac{p}{E} = v \quad (15)$$

Por fim, para partículas sem massa, como o fóton, tem-se (em unidades naturais) $v^2 = 1$ e $m = 0$, e (11) e (12) se tornam indeterminadas, mas valerá a razão (15), tal que

$$E = |p| \quad (16)$$

2.1.3 Densidades de Corrente e de Cargas

Supondo-se um sistema de partículas com posição $x_n(t)$ e cargas e_n . As densidades de carga e de correntes são definidas por

$$\mathbf{J}(x, t) \equiv \sum e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{d\mathbf{x}_n(t)}{dt} \quad (17)$$

$$\rho(x, t) \equiv \sum e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \quad (18)$$

Onde δ^3 é a função delta de Dirac em três dimensões. Une-se \mathbf{J} e ρ em um quadrivetor J^α fazendo

$$J^0 \equiv \rho \quad (19)$$

Ou seja,

$$\mathbf{J}^\alpha(x) \equiv \sum e_n \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^\alpha(t)}{dt} \quad (20)$$

Uma propriedade importante é a derivação da equação de continuidade,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{J}(x, t) &= \sum e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \\ &= - \sum e_n \frac{\partial}{\partial x^i} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \\ &= - \sum e_n \frac{\partial}{\partial t} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \rho(x, t) \end{aligned} \quad (21)$$

ou, em uma linguagem quadri-dimensional

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} J^\alpha(x) \equiv 0 \quad (22)$$

Onde fica evidente a invariância de Lorentz. Sempre que qualquer corrente $J^\alpha(x)$ satisfaz a lei de conservação dada por (22), pode-se escrever a carga total como

$$Q \equiv \int d^3x J^0(x) \quad (23)$$

E essa quantidade é independente do tempo, já que, pelo teorema de Gauss, tem-se

$$\frac{dQ}{dt} = \int d^3x \frac{\partial}{\partial x^0} J^0(x) = - \int d^3x \nabla \cdot \mathbf{J}(x) = 0 \quad (24)$$

O resultado é zero porque tem-se que $\mathbf{J} \rightarrow 0$ se $|x| \rightarrow \infty$.

2.1.4 Eletrodinâmica

As equações de Maxwell no vácuo para os campos elétrico e magnéticos, \mathbf{E} e \mathbf{B} , produzidos por uma dada densidade de carga ρ e uma densidade de corrente \mathbf{J} são (em S.I.):

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (26)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (27)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J} \quad (28)$$

As propriedades das transformações de Lorentz em \mathbf{E} e \mathbf{B} ficam evidentes quando se introduz uma matriz $F^{\alpha\beta}$, definida por

$$\begin{aligned} F^{12} &= B_3 \\ F^{23} &= B_1 \\ F^{31} &= B_2 \\ F^{01} &= E_1 \\ F^{02} &= E_2 \\ F^{03} &= E_3 \\ F^{\alpha\beta} &= - F^{\beta\alpha} \end{aligned}$$

Dessa maneira, as equações (25) e (26) podem ser escritas como

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} F^{\alpha\beta} = -J^\beta \quad (29)$$

E, da mesma forma, as equações (27) e (28) ficam

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial}{\partial x^\beta} F_{\gamma\delta} = 0 \quad (30)$$

onde $F_{\gamma\delta}$ é definido por

$$F_{\gamma\delta} \equiv \eta_{\gamma\alpha} \eta_{\delta\beta} F^{\alpha\beta} \quad (31)$$

e $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ é o símbolo de Levi-Civita dado por

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = +1$ se $\alpha\beta\gamma\delta$ é permutação par de 0123
$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = -1$ se $\alpha\beta\gamma\delta$ é permutação ímpar de 0123
$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ se outro caso

Como J^α é um quadrivetor, conclui-se que $F^{\alpha\beta}$ é um tensor, tal que

$$F'^{\alpha\beta} = \lambda_\gamma^\alpha \lambda_\delta^\beta F^{\gamma\delta} \quad (32)$$

Já que, se $F^{\alpha\beta}$ é solução das equações (29) e (30), então (32) será a solução no sistema de coordenadas transformado por Lorentz.

Por fim, a equação (30) permite representar $F_{\gamma\delta}$ como o rotacional de um quadrivetor A_γ , tal que

$$F_{\gamma\delta} = \frac{\partial}{\partial x^\gamma} A_\delta - \frac{\partial}{\partial x^\delta} A_\gamma \quad (33)$$

Esse último resultado é muito útil no eletromagnetismo.

2.2 Tensor Energia-Momento

Semelhantemente à definição de densidade de carga elétrica, ρ , e corrente de carga elétrica, \mathbf{J} , têm-se as definições de densidade e corrente de um quadrivetor de energia-momento p^α .

Considerando um sistema de partículas n , com quadrivetor $p_n^\alpha(t)$, define-se a densidade de p^α como

$$T^{\alpha 0}(x, t) \equiv \sum p_n^\alpha(t) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \quad (34)$$

A corrente é dada por

$$T^{\alpha i}(x, t) \equiv \sum p_n^\alpha(t) \frac{dx_n^i(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \quad (35)$$

Essas duas definições são unidas em uma única equação dada por

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum p_n^\alpha \frac{dx_n^\beta(t)}{dt} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \quad (36)$$

(onde $\mathbf{x}_n^0 \equiv t$). Da relação (15) tem-se

$$p_n^\beta = E_n \frac{dx_n^\beta}{dt} \quad (37)$$

Assim, a equação (36) também pode ser escrita como

$$T^{\alpha\beta}(x) = \sum \frac{p_n^\alpha p_n^\beta}{E_n} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n(t)) \quad (38)$$

de forma que ele também é simétrico

$$T^{\alpha\beta}(x) = T^{\beta\alpha}(x) \quad (39)$$

E é um tensor, tal que

$$T'^{\alpha\beta} = \lambda_\gamma^\alpha \lambda_\delta^\beta T^{\gamma\delta} \quad (40)$$

Por fim, há uma lei de conservação para o tensor energia-momento tal que se as partículas são livres, então p_n^α é constante e $T^{\alpha\beta}$ é conservado:

$$\frac{\partial}{\partial x^\beta} T^{\alpha\beta}(x) = 0 \quad (41)$$

O mesmo ocorre para partículas interagindo apenas durante colisões, estritamente localizadas no espaço. Porém, o tensor energia-momento não será conservado se as partículas estão sujeitas a forças que agem à distância. Assim, pensando-se nos efeitos da gravitação em qualquer sistema, generaliza-se que a densidade e a corrente de energia e do momento foram unidas no tensor simétrico $T^{\alpha\beta}$ satisfazendo as equações de conservação

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} T^{\alpha\beta} = G^\beta \quad (42)$$

onde $G^{\alpha\beta}$ é a densidade de forças externas f^β atuando no sistema (para um sistema isolado, $G^\beta = 0$.) Define-se $T^{\mu\nu}$ e G^ν como tensores contravariantes que se reduzem a $T^{\alpha\beta}$ e G^β na relatividade restrita na ausência de gravidade. Assim, a forma geral da equação covariante que está em acordo com a equação (42) em um sistema localmente inercial é

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = G^\nu \quad (43)$$

Ainda, considerando-se um fator \sqrt{g} , derivado da própria métrica (ver (87)) (que é também familiar à eletrodinâmica, e surge do fato de que o volume invariante é $\sqrt{g}d^4x$),

$$T^{\mu\nu}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \quad (44)$$

Onde $\Gamma_{\mu\lambda}^\nu$ é o *símbolo de Christoffel* (ou coeficiente de conexão afim) e será introduzido melhor no próximo capítulo, mas que é definido, em um sistema de coordenadas localmente inercial, ξ^α , como

$$\Gamma_{\mu\lambda}^\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\lambda} \quad (45)$$

Obtêm-se, então,

$$\frac{1}{(\sqrt{g})} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{g} T^{\mu\nu}) = G^\nu - \Gamma_{\mu\lambda}^\nu T^{\mu\lambda} \quad (46)$$

Em contraste, o segundo termo da direita representa a densidade de *força* gravitacional. Assim, como era esperado, essa força depende do sistema em que age apenas o tensor de energia-momento.

Para um sistema de partículas na relatividade restrita, o tensor de energia-momento é

$$T^{\alpha\beta} = \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\alpha}{d\tau} dx_n^\beta \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (47)$$

A integral é tomada ao longo da trajetória da partícula. Seguindo raciocínio semelhante ao desenvolvido para J^α , conclue-se que o tensor contravariante que concorda com a equação acima na ausência de gravidade é

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_n m_n \int \frac{dx_n^\mu}{d\tau} dx_n^\nu \delta^4(\mathbf{x} - \mathbf{x}_n) \quad (48)$$

Para um campo eletromagnético $F^{\alpha\beta}$, o tensor de energia-momento foi calculado na relatividade restrita como

$$T^{\alpha\beta} = F_\gamma^\alpha F^{\beta\gamma} - \frac{1}{4} \eta^{\alpha\beta} F_{\gamma\delta} F^{\gamma\delta} \quad (49)$$

Na ausência de gravidade, o tensor contravariante mais simples (poder-se-ia existir termos com a curvatura) em acordo com o acima é

$$T^{\mu\nu} = F_\lambda^\mu F^{\nu\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F_{\lambda k} F^{\lambda k} \quad (50)$$

Para um sistema constituído de partículas e radiação, o tensor de energia-momento é a soma de (48) e (50).

Retornando para o tensor de energia-momento apenas da matéria (48), chega-se em

$$\int T^{\mu 0} g^{1/2} d^3 x = \sum_n m_n \frac{dx_n^\mu}{d\tau} \quad (51)$$

com a soma abrangendo todas as partículas no volume de integração (sugerindo, mais uma vez, que $T^{\mu 0} g^{1/2}$ deve ser interpretado como a densidade espacial de energia e de momento). Em particular, define-se a energia, o momento e o momento angular para um sistema arbitrário por

$$P^\mu \equiv \int T^{\mu 0} g^{1/2} d^3 x \quad (52)$$

$$J^{\mu\nu} \equiv \int (x^\mu T^{\nu 0} - x^\nu T^{\mu 0}) g^{1/2} d^3 x \quad (53)$$

Entretanto, essas quantidades não são tensores contravariantes e *não são conservadas*, porque $T^{\mu\nu} g^{1/2}$ não é conservado, isto é, $\frac{\partial}{\partial x^\nu} (T^{\mu\nu} g^{1/2})$ não vai a zero, devido à troca de energia e momento entre matéria e gravitação.

2.2.1 Spin

Uma importante uso do tensor energia-momento é para definir o spin e o momento angular. Considerando-se, primeiramente, um sistema isolado para o qual o tensor total energia-momento é conservado (equação (41)), pode-se construir outro tensor

$$M^{\gamma\alpha\beta} \equiv x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma} \quad (54)$$

Mas $T^{\alpha\gamma}$ é conservado e simétrico, logo, M é conservado:

$$\frac{\partial}{\partial x^\gamma} M^{\gamma\alpha\beta} = T^{\beta\alpha} - T^{\alpha\beta} = 0 \quad (55)$$

E o momento angular total, que inclui o momento angular orbital (com respeito a algum centro de rotação) é dado por

$$J^{\alpha\beta} = \int d^3x M^{0\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha} \quad (56)$$

Isolando-se a parte interna de $J^{\beta\alpha}$, pode-se definir um quadrivetor de spin

$$S_\alpha \equiv \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} J^{\beta\gamma} U^\delta \quad (57)$$

onde $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ é tensor antissimétrico de Levi Civita (na sessão "Eletrodinâmica") e

$$U^\alpha \equiv \frac{p^\alpha}{(-p_\beta p^\beta)^{\frac{1}{2}}} \quad (58)$$

é quadri-velocidade do sistema.

2.3 Análise Tensorial

2.3.1 Vetores e Tensores

O elemento mais simples de qualquer regra de transformação tensorial é o escalar, que simplesmente não muda sob transformações gerais de coordenadas. Exemplos de escalares são os números reais ou o tempo próprio $d\tau$ (equações (4), (96), (99)).

Os próximos elementos mais simples são os vetores contravariantes, V^μ , que sob uma transformação de coordenada $x^\mu \rightarrow x'^\mu$ se transformam com

$$V'^\mu = V^\nu \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \quad (59)$$

E as regras de diferenciação parcial dão

$$dx'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (60)$$

Logo, a coordenada diferencial é um vetor contravariante. Para vetores covariantes, U_μ , a transformação é semelhante

$$U'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} U_\nu \quad (61)$$

Pode-se, agora, generalizar-se para *tensores*, tal que, para a transformação de coordenada $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, tem-se:

$$T'^{\mu\lambda} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\sigma} T^{\kappa\sigma} \quad (62)$$

O exemplo mais importante é o tensor métrico (100) para um sistema geral de coordenadas x^μ :

$$g_{\mu\nu} \equiv \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu}$$

Onde ξ^α é um sistema de coordenadas localmente inercial. Em outro sistema de coordenadas, x'^μ , o tensor métrico é

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x'^\nu} \\ &= \eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \end{aligned}$$

e assim,

$$g'_{\mu\nu} = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \quad (63)$$

O inverso do tensor métrico é um tensor contravariante, tal que ambos são construídos sob a relação com o delta de Kronecker:

$$g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta_\nu^\lambda \quad (64)$$

2.3.2 A Conexão Afim (Affine Connection)

Juntamente com as propriedades da análise tensorial nas definições das leis físicas têm-se alguns elementos que são importantes e que não se apresentam como tensores, dando-se destaque à *Conexão Afim*, que já foi introduzida em (45) e para um sistema de coordenadas localmente inercial, ξ^α é definida como:

$$\Gamma_{\nu\mu}^\lambda \equiv \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\nu \partial x^\mu} \quad (65)$$

A Conexão não é um tensor e, passando x^ν para outro referencial x'^ν , tem-se:

$$\begin{aligned} \Gamma'_{\nu\mu}{}^\lambda &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\nu \partial x'^\mu} \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial}{\partial x'^\nu} \left(\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right) \\ &= \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} \left[\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x^\tau}{\partial x'^\mu} \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x'^\tau \partial x'^\sigma} + \frac{\partial^2 x^\sigma}{\partial x'^\mu \partial x'^\nu} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\sigma} \right] \end{aligned} \quad (66)$$

Logo,

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\prime\lambda} = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho + \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} \quad (67)$$

O termo da esquerda é o que se esperaria se $\Gamma_{\nu\mu}^\lambda$ fosse um tensor, mas percebe-se um segundo termo não homogêneo. Esse termo pode ser escrito de outra maneira, utilizando a identidade:

$$\frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\nu}} = \delta_\nu^\lambda \quad (68)$$

Diferenciando a equação acima com respeito a $x^{\prime\mu}$:

$$\frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial^2 x^\rho}{\partial x^{\prime\mu} \partial x^{\prime\nu}} = - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial^2 x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (69)$$

A equação (67) pode então ser escrita como:

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\prime\lambda} = \frac{\partial x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\nu}} \Gamma_{\tau\sigma}^\rho - \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\nu}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\mu}} \frac{\partial^2 x^{\prime\lambda}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (70)$$

Essa equação também seria encontrada se fosse realizada primeiramente a transformação inversa x' e depois resolvido para $\Gamma_{\nu\mu}^{\prime\lambda}$.

2.3.3 Derivada Covariante

Primeiramente, seja V^μ um tensor contravariante, cuja lei de transformação é:

$$V^{\prime\mu} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} V^\nu \quad (71)$$

Derivando-se em relação à $x^{\prime\lambda}$ têm-se:

$$\frac{\partial V^{\prime\mu}}{\partial x^{\prime\lambda}} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} \frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \frac{\partial^2 x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu \partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} V^\nu \quad (72)$$

Conseqüentemente, $\frac{\partial V^{\prime\mu}}{\partial x^{\prime\lambda}}$ não é um tensor, porém, utilizando a equação (70):

$$\Gamma_{\lambda\kappa}^{\prime\mu} V^{\prime\kappa} = \left[\frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\kappa}} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu - \frac{\partial^2 x^{\prime\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\prime\kappa}} \right] \frac{\partial x^{\prime\kappa}}{\partial x^\eta} V^\eta \quad (73)$$

Portanto:

$$\Gamma_{\lambda\kappa}^{\prime\mu} V^{\prime\kappa} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} \Gamma_{\rho\sigma}^\nu V^\sigma - \frac{\partial^2 x^{\prime\mu}}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} V^\sigma \quad (74)$$

Somando-se (72) com (74) a parte não homogênea se cancela e obtêm-se:

$$\frac{\partial V^{\prime\mu}}{\partial x^{\prime\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\prime\mu} V^{\prime\kappa} = \frac{\partial x^{\prime\mu}}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\prime\lambda}} \left(\frac{\partial V^\nu}{\partial x^\rho} + \Gamma_{\rho\sigma}^\nu V^\sigma \right) \quad (75)$$

Segue então a definição de derivada covariante:

$$V_{;\lambda}^{\mu} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \Gamma_{\lambda\kappa}^{\mu} V^{\kappa} \quad (76)$$

Por (75) verifica-se que $V_{;\lambda}^{\mu}$ é um tensor:

$$V'_{;\lambda}{}^{\mu} = \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x^{\rho}}{\partial x'^{\lambda}} V_{;\rho}{}^{\nu} \quad (77)$$

Da mesma maneira, seguindo passos análogos, define-se a derivada covariante de um vetor covariante:

$$V_{\mu;\nu} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V_{\lambda} \quad (78)$$

2.3.4 Derivadas Covariantes: Gradiente, Rotacional e Divergente

Há alguns casos especiais em que a derivada covariante assume formas simples. A mais simples é a derivada covariante de um escalar, que é simplesmente o *gradiente covariante*

$$S_{;\mu} = \frac{\partial V}{\partial x^{\mu}} \quad (79)$$

Outro caso simples é o *rotacional covariante*, definido como

$$V_{\mu;\nu} \equiv \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} V_{\lambda} \quad (80)$$

e como $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ é simétrico em μ e ν , o rotacional covariante fica

$$V_{\mu;\nu} - V_{\nu;\mu} = \frac{\partial V_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial V_{\nu}}{\partial x^{\mu}} \quad (81)$$

O último caso de derivada covariante é o divergente de um vetor contravariante:

$$V_{;\mu}^{\mu} \equiv \frac{\partial V^{\mu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} V^{\lambda} \quad (82)$$

A partir das equações (65) e (100), a conexão $\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu}$ pode ser escrita em função da métrica (tal que $\nabla_{\mu} g_{\nu\sigma} = 0$),

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \left\{ \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\rho\lambda}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\rho}} \right\} \quad (83)$$

Ou seja,

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\lambda}} \quad (84)$$

Lembrando-se da seguinte propriedade, para uma matriz arbitrária M ,

$$Tr\{M^{-1} \frac{\partial M}{\partial x^{\lambda}}\} = \frac{\partial \ln Det M}{\partial x^{\lambda}} \quad (85)$$

onde $M = M(x)$. Utilizando essa propriedade (85) para a matriz $g_{\rho\mu}$, obtêm-se para (84),

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{2} \frac{\partial \ln g}{\partial x^{\lambda}} \quad (86)$$

ou seja

$$\Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\lambda}} \quad (87)$$

Através da equação (82), a *divergência covariante* é escrita precisamente

$$V_{;\mu}^{\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\sqrt{g} V^{\mu}) \quad (88)$$

De onde já se percebe a consequência imediata na forma do Teorema de Gauss: se V^{ν} for para 0 no infinito, então

$$\int d^4x \sqrt{g} V_{;\mu}^{\mu} = 0 \quad (89)$$

Generaliza-se então a divergência covariante de um tensor, através da equação (87),

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\mu} T^{\lambda\nu} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} T^{\mu\lambda} \quad (90)$$

e, através de (87) têm-se

$$T_{;\mu}^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} T^{\mu\nu})}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\lambda}^{\nu} T^{\mu\lambda} \quad (91)$$

2.4 O Princípio de Equivalência

O princípio de equivalência afirma que qualquer campo gravitacional pode ser cancelado pela ação de forças inerciais, para qualquer sistema, por mais complexo que esse o seja. Além disso, o princípio de equivalência em sua forma final, dependerá da variação do campo gravitacional no espaço-tempo.

2.4.1 A Formulação do Princípio de Equivalência

O princípio de equivalência foi utilizado por Einstein como fonte de inspiração fundamental para o desenvolvimento da Relatividade Geral, sendo que, basicamente, ele trata da igualdade entre a massa gravitacional e a massa inercial.

Suponha dois observadores: um em repouso, \mathbf{O} , que observa a queda livre de um elevador onde o observador \mathbf{O}' está. Um sistema de partículas \mathbf{N} que se move com velocidades não-relativísticas, está sujeito a ações da força \mathbf{g} e outras do tipo $F(x_N - x_M)$ (de origem eletromagnética e/ou gravitacional). A equação do movimento dessas partículas será:

$$m_N \frac{d^2 \mathbf{x}_N}{dt^2} = m_N \mathbf{g} + \sum_M \mathbf{F}(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M) \quad (92)$$

Ante uma transformação não-Galileana do espaço e do tempo:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 \quad t = t \quad (93)$$

Cancela-se \mathbf{g} através de uma "força" inercial:

$$m_N \frac{d^2 \mathbf{x}_N}{dt^2} = \sum_M F(\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_M) \quad (94)$$

De maneira que as leis físicas serão iguais (isto é, equivalentes) nos dois referências, a despeito do observador \mathbf{O} dizer que sente um campo gravitacional \mathbf{g} e \mathbf{O}' dizer que não. O que o princípio de equivalência diz é que esse cancelamento da força gravitacional por uma força inercial ocorrerá em qualquer sistema físico em queda-livre, mesmo que não se tenha uma descrição tão simples como na (92) (mas, por enquanto, esse é apenas os efeitos de um campo gravitacional estático e homogêneo, e a forma final do princípio de equivalência ainda não pôde ser apresentada).

O efeito de um campo gravitacional variável pode ser ilustrado pelo movimento de dois corpos em queda-livre nas proximidades do planeta. Eles se aproximariam durante o movimento de descida, tendendo a se encontrar no centro de massa da Terra. Apesar do campo gravitacional não ser realmente anulado por forças inerciais, o efeito ainda pode ser observado considerando apenas uma parcela muito pequena do espaço-tempo, tão pequena que se pode considerá-la como um referencial localmente inercial.

Aqui é interessante notar a proximidade do que foi dito sobre Relatividade Geral e a geometria não-Euclideana, proposta por Gauss. Segundo Gauss, para qualquer ponto em uma curva, pode-se encontrar um sistema de coordenadas cartesiano, onde as leis da geometria plana de Euclides são satisfeitas. E, segundo o princípio de equivalência, em qualquer ponto do espaço-tempo é possível de se encontrar um referencial localmente inercial, onde as leis de Newton são satisfeitas.

2.4.2 Forças Gravitacionais

Considera-se uma partícula movendo-se livremente sobre a influência de forças gravitacionais. De acordo com o Princípio de Equivalência, há um sistema de coordenada em queda livre ξ^α em que a equação de movimento é uma linha reta no espaço-tempo,

$$\frac{d^2 \xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \quad (95)$$

com $d\tau$ o tempo próprio (definido em (4))

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta \quad (96)$$

Supondo-se, agora, que um outro sistema de coordenadas x^μ , e a equação (95) se torna

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\tau} \left(\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \right) \\ &= \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \frac{\partial^2 \xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} \end{aligned}$$

Multiplicando por $\partial x^\lambda / \partial \xi^\alpha$, tem-se a equação de movimento

$$\frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0 \quad (97)$$

O elemento $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ é o coeficiente de conexão afim, definido em (65).

O tempo próprio (96) pode ser também expresso em um sistema de coordenadas arbitrário,

$$d\tau^2 = -\eta_{\alpha\beta} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} dx^\nu \quad (98)$$

ou ainda,

$$d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (99)$$

onde $g_{\mu\nu}$ é o *tensor métrico* definido por

$$g_{\mu\nu} \equiv \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \xi^\beta}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \quad (100)$$

O tensor métrico, ou métrica, é um tensor simétrico que é usado para medir a distância e descrever a geometria de um espaço. Ou seja, ele transmite todas as informações sobre estrutura causal e geométrica do espaço-tempo. Usando a métrica pode-se definir noções como distâncias, volume, ângulos, passado, futuro e curvatura. Em outros termos, dada uma variedade plana, escolhe-se o tensor sobre os espaços tangentes à variedade. Em um ponto dado sobre a variedade, este tensor leva um par de vetores no espaço tangente ao ponto, e encontra um número real. Este conceito é exatamente como um produto pontual ou produto interno.

No primeiro tópico desse capítulo, na definição de relatividade restrita, houve em (2) a introdução de um tensor métrico especial: $\eta_{\alpha\beta}$, chamado de tensor de Minkowski.

2.4.3 O Limite Newtoniano

Para estabelecer o contato com a teoria de Newton, considera-se o caso de uma partícula movendo-se vagarosamente em um campo gravitacional fraco estacionário. A equação do movimento (97) era

$$0 = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}$$

Se a partícula é suficientemente lenta, omite-se o termo $\frac{dx}{d\tau}$ em comparação a $\frac{dt}{d\tau}$, e pode-se escrever

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{00}^\mu \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 0 \quad (101)$$

Como o campo é estacionário, todas as derivadas temporais de $g_{\mu\nu}$ desaparecem e, assim,

$$\Gamma_{00}^\mu = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g^{00}}{\partial x^\nu}$$

Finalmente, sendo o campo fraco, adota-se coordenadas cartesianas, tal que

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} \quad |h_{\alpha\beta}| \ll 1 \quad (102)$$

De maneira que, em primeira ordem de $h_{\alpha\beta}$,

$$\Gamma_{00}^\alpha = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\beta} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^\beta}$$

Utilizando-se de tais resultados nas equações de movimento, tem-se

$$\frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \nabla h_{00}$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = 0$$

Na solução da segunda equação, $\frac{dt}{d\tau}$ é igual a uma constante, então divide-se a equação para $\frac{d^2 x}{d\tau^2}$ por $\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2$, e é possível encontrar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{1}{2} \nabla h_{00} \quad (103)$$

Finalmente, o resultado Newtoniano correspondente é

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla\phi \quad (104)$$

onde ϕ é o potencial gravitacional que, a uma distância r do centro de um corpo esférico de massa M , toma a forma

$$\phi = -\frac{GM}{r} \quad (105)$$

Comparando-se com as duas relações anteriores, conclui-se que

$$h_{00} = -2\phi + \text{constante} \quad (106)$$

Além disso, o sistema de coordenadas deve se tornar cartesiano a grandes distâncias, então h_{00} desaparece no infinito e, definindo-se ϕ de modo a também desaparecer no infinito, é possível concluir que a constante que resta é nula, então $h_{00} = -2\phi$ e, por fim, retornando-se à métrica $g_{\alpha\beta}$,

$$g_{00} = -(1 + 2\phi) \quad (107)$$

2.5 Curvatura

2.5.1 Definição do Tensor de Curvatura

O objetivo é construir um novo tensor com a métrica ($g_{\mu\nu}$) e suas derivadas. Utilizando-se $g_{\mu\nu}$ e suas primeiras derivadas, não há como achar um novo tensor: para qualquer ponto, é possível de se encontrar um sistema de coordenadas em que as primeiras derivadas do tensor métrico vão a zero e nesse sistema de coordenadas o tensor deve ser igual a algum que pode ser construído apenas pelo tensor métrico e, como trata-se de uma igualdade entre os tensores, deve ser verdade em todos os sistemas de coordenadas.

A próxima possibilidade é construir um tensor com $g_{\mu\nu}$ e suas segundas derivadas. Lembrando-se das transformações para a conexão afim (equação (67)):

$$\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma} + \frac{\partial x^{\lambda}}{\partial x'^{\tau}} \frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} \quad (108)$$

Isolando o termo inhomogêneo à direita (e usando a comutatividade da diferenciação parcial):

$$\frac{\partial^2 x'^{\tau}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \Gamma'_{\rho\sigma} \quad (109)$$

Diferenciando-se com respeito a x^{κ} , separando-se os termos similares e subtraindo-se a equação obtida por uma similar com o índice κ trocado por ν , resulta-se que todos os termos envolvendo produtos de Γ e Γ' vão embora, de forma a ser ter, finalmente,

$$0 = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \left(\frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right) + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \\ - \frac{\partial x'^{\rho}}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x'^{\sigma}}{\partial x^{\nu}} \frac{\partial x'^{\eta}}{\partial x^{\kappa}} \left(\frac{\partial \Gamma'_{\rho\sigma}}{\partial x'^{\eta}} - \frac{\partial \Gamma'_{\rho\eta}}{\partial x'^{\sigma}} - \Gamma'_{\lambda\sigma} \Gamma'_{\eta\rho} + \Gamma'_{\lambda\eta} \Gamma'_{\sigma\rho} \right)$$

Esse resultado pode ser escrito como uma regra de transformação tal que

$$R'_{\rho\sigma\eta}{}^{\tau} = \frac{\partial x'^{\tau}}{\partial x^{\lambda}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\rho}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\sigma}} \frac{\partial x^{\kappa}}{\partial x'^{\eta}} R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \quad (110)$$

onde

$$R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda} \equiv \frac{\partial \Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}}{\partial x^{\kappa}} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\kappa}^{\lambda}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma_{\mu\nu}^{\eta} \Gamma_{\kappa\eta}^{\lambda} - \Gamma_{\mu\kappa}^{\eta} \Gamma_{\nu\eta}^{\lambda} \quad (111)$$

Pela equação (110) percebe-se que $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ é um tensor, e este é chamado de *tensor de curvatura Riemann-Christoffel*.

Uma importante propriedade é que o tensor $R_{\mu\nu\kappa}^{\lambda}$ expressa a presença ou ausência de um campo gravitacional verdadeiro. Considerando a segunda derivada covariante de um vetor covariante V_{λ} , que é $V_{\mu;\nu;\kappa}$, tem-se que os termos envolvendo as primeiras e segundas derivadas são simétricos em ν e κ , mas os termos envolvendo V_{μ} contêm uma parte antissimétrica,

$$V_{\mu;\nu;\kappa} - V_{\mu;\kappa;\nu} = -V_{\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} \quad (112)$$

E, da mesma maneira, pode-se mostrar que

$$V_{;\nu;\kappa}^{\lambda} - V_{;\kappa;\nu}^{\lambda} = V^{\sigma} R_{\sigma\nu\kappa}^{\lambda} \quad (113)$$

E, para qualquer tensor,

$$T_{\mu;\nu;\kappa}^{\lambda} - T_{\mu;\kappa;\nu}^{\lambda} = T_{\mu}^{\sigma} R_{\sigma\nu\kappa}^{\lambda} - T_{\sigma}^{\lambda} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} \quad (114)$$

Assim, se o tensor de curvatura vai a zero, as derivadas covariantes comutam, como se esperaria em um sistema de coordenadas que pode ser transformado em um sistema de coordenadas de Minkowski.

2.5.2 Propriedades Algébricas de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$

A partir da importante transformação de equivalência do tensor de curvatura

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa} \equiv g_{\lambda\sigma} R_{\mu\nu\kappa}^{\sigma} \quad (115)$$

Juntamente com (111) e a relação entre a métrica e a conexão afim

$$\Gamma_{\lambda\mu}^{\sigma} = \frac{1}{2} g^{\nu\sigma} \left[\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}} \right] \quad (116)$$

após algumas manipulações e cancelamentos dos termos em $\Gamma\Gamma$, finalmente, resulta-se em

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu\nu\kappa} = & \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right] \\ & + g_{\eta\sigma} [\Gamma_{\nu\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\kappa}^{\sigma} - \Gamma_{\kappa\lambda}^{\eta} \Gamma_{\mu\nu}^{\sigma}] \end{aligned} \quad (117)$$

Essa equação possibilita a verificação de várias propriedades do tensor de curvatura:

- (A) Simetria: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = R_{\nu\kappa\lambda\mu}$
- (B) Antissimetria: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} = -R_{\mu\lambda\nu\kappa}$
- (C) Ciclicidade: $R_{\lambda\mu\nu\kappa} + R_{\lambda\kappa\mu\nu} + R_{\lambda\nu\kappa\mu} = 0$

Uma última definição importante é o fato de que $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ pode ser contraído com a métrica, dando o *tensor de Ricci*

$$R_{\mu\kappa} = g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu\kappa} \quad (118)$$

Tal que a propriedade de simetria (A) mostra também que o tensor de Ricci é simétrico:

$$R_{\mu\kappa} = R_{\kappa\mu} \quad (119)$$

2.5.3 As Identidades de Bianchi

O tensor de curvatura obedece importantes identidades diferenciais. Dado um ponto x , adotando um sistema de coordenadas localmente inercial em que $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$ vai a zero em x , pela equação (115) tem-se

$$R_{\lambda\mu\nu\kappa;\eta} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^{\eta}} \left[\frac{\partial^2 g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\mu}} - \frac{\partial^2 g_{\mu\nu}}{\partial x^{\kappa} \partial x^{\lambda}} - \frac{\partial^2 g_{\lambda\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\mu}} + \frac{\partial^2 g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\nu} \partial x^{\lambda}} \right]$$

Permutando-se ν , κ e η ciclicamente, obtém-se as *identidades de Bianchi*

$$R_{\lambda\mu\nu;\eta} + R_{\lambda\mu\eta;\nu} + R_{\lambda\mu\kappa\eta;\nu} = 0 \quad (120)$$

Essas equações são em geral covariantes e, dessa forma, se elas são verdade em sistemas inercias, elas são verdade em todos os casos gerais. Como as derivadas covariantes de $g^{\lambda\nu}$ são nulas, tem-se também que (contraíndo λ com ν):

$$R_{\mu\kappa;\eta} - R_{\mu\eta;\kappa} + R_{\mu\kappa\eta;\nu}^{\nu} = 0 \quad (121)$$

Contraíndo-se novamente, resulta-se em

$$R_{;\eta} - R_{\eta;\mu}^{\mu} + R_{\eta;\nu}^{\nu} = 0 \quad (122)$$

ou ainda

$$(R_{\eta}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\eta}^{\mu} R)_{;\mu} = 0 \quad (123)$$

E, em uma forma também útil,

$$(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R)_{;\mu} = 0 \quad (124)$$

3 As Equações de Einstein

3.1 Derivação das Equações de Campo

As equações de campo para a gravitação são bem mais complicadas do que as para o eletromagnetismo. As equações de Maxwell são lineares porque o campo eletromagnético não carrega carga em si, porém o campo gravitacional carrega energia e momento. Ou seja, as equações de campo gravitacionais serão equações diferenciais parciais não lineares e a não lineariedade representa o efeito da própria gravitação.

Previamente foi visto que é possível lidar com os efeitos não-lineares pelo Princípio de Equivalência. Em qualquer ponto X em um campo gravitacional arbitrariamente forte, pode-se definir um sistema de coordenadas localmente inercial que respeite

$$g_{\alpha\beta}(X) = \eta_{\alpha\beta} \quad (125)$$

$$\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}(x)}{\partial x^\gamma}\right)_{x=X} = 0 \quad (126)$$

Para um x perto de X , o tensor da métrica $g_{\alpha\beta}$ pode se diferenciar de $\eta_{\alpha\beta}$ apenas por termos quadráticos em $x - X$. Neste sistema de coordenadas, o campo gravitacional é fraco perto de X e só é possível descrevê-lo por equações diferenciais parciais *lineares*. E uma vez que é sabido quem são essas equações de campo-fraco, pode-se achar as equações gerais do campo revertendo as transformações de coordenadas que fazem o campo fraco. Infelizmente, há muito pouca informação empírica sobre as equações de campo-fraco: a radiação gravitacional é tão fracamente gerada e absorvida pela matéria que ainda não foi detectada.

Em um campo estático fraco produzido por uma densidade de massa não-relativística ρ , a componente tempo-tempo do tensor métrico é aproximadamente dado por (106): $g_{00} \simeq -(1 + 2\phi)$, onde ϕ é o potencial Newtoniano, determinado pela equação de Poisson

$$\nabla^2 \phi = 4\pi G\rho \quad (127)$$

A densidade de energia T_{00} para matéria não-relativística é igual a sua densidade de massa,

$$T_{00} \simeq \rho \quad (128)$$

Somando as equações (127) e (128) tem-se

$$\nabla^2 g_{00} = -8\pi G T_{00} \quad (129)$$

Essa equação de campo serve apenas para campos estáticos fracos gerados pela matéria não-relativística, e nem é sequer invariante de Lorentz. Porém (129) mostra que as equações de campo-fraco para uma distribuição geral $T_{\alpha\beta}$ de energia e momento tomam a forma de

$$G_{\alpha\beta} = -8\pi G T_{\alpha\beta} \quad (130)$$

Onde $G_{\alpha\beta}$ é uma combinação linear da métrica e suas primeiras derivadas. Segue-se do princípio de equivalência que as equações que governam os campos gravitacionais de uma força arbitrária devem ter a forma

$$G_{\mu\nu} = -8\pi G T_{\mu\nu} \quad (131)$$

onde $G_{\mu\nu}$ é um tensor que se reduz a $G_{\alpha\beta}$ para campos fracos.

Em geral, há uma variedade de tensores $G_{\mu\nu}$ que podem ser formados dos tensores métricos e seus derivados, e que reduzem-se ao limite campo-fraco para um dado $G_{\alpha\beta}$. Expandindo-se $G_{\mu\nu}$ em uma soma de produtos de derivadas da métrica, pode-se classificar cada termo de acordo com o número total N de derivadas das componentes da métrica (por exemplo, um termo com $N=3$ poderia ser linear na terceira derivada da métrica, ou um produto de três primeiras derivadas). Assim, $G_{\mu\nu}$ deve ter dimensões de uma segunda derivada, e cada termo do tipo $N \neq 2$ aparece multiplicado com uma constante de dimensão de comprimento na potência $N - 2$. Esses termos serão negligenciáveis para campos

gravitacionais de escalas de espaço-tempo suficientemente grandes ou pequenos, se $N > 2$ ou $N < 2$, respectivamente. Assim, para remover a ambigüidade em $G_{\mu\nu}$, assume-se que as equações do campo gravitacional são uniformes na escala, e, assim, apenas termos com $N = 2$ são permitidos. Finalmente, as propriedades necessárias para achar $G_{\mu\nu}$ são tais que:

(A) é um tensor (por definição).

(B) tem apenas termos com $N = 2$ derivadas da métrica.

(C) como $T_{\mu\nu}$ é simétrico, então $G_{\mu\nu}$ também é.

(D) como $T_{\mu\nu}$ é conservado, então $G_{\mu\nu}$ também é ($G^\mu_{\nu;\mu} = 0$).

(E) para um campo fraco estacionário produzido por matéria não relativística, a componente de (131) deve se reduzir para (129), e também no limite:

$$G_{00} \cong \nabla^2 g_{00} \quad (132)$$

Já foi exposto, no capítulo anterior, que a maneira mais geral de construir um campo que satisfaça (A) e (B) é pela contração do tensor de curvatura $R^\lambda_{\mu\nu\kappa}$. A propriedade de anti-simetria de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ diz que só há dois tensores que podem ser formados pela contração de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$, que são o tensor de Ricci(118) e o escalar de curvatura ($R = R^\mu_\mu$). E, dessa forma, (A) e (B) fazem com que $G_{\mu\nu}$ tenha a forma

$$G_{\mu\nu} = C_1 R_{\mu\nu} + C_2 g_{\mu\nu} R \quad (133)$$

onde C_1 e C_2 são constantes. Usando a identidade de Bianchi (equação (123)) encontra-se a divergência covariante de $G_{\mu\nu}$ como

$$G^\mu_{\nu;\mu} = \left(\frac{C_1}{2} + C_2\right) R_{;\nu} \quad (134)$$

e (D) permite duas possibilidades: ou $C_2 = -\frac{C_1}{2}$ ou $R_{;\nu}$ vai a zero em qualquer lugar. Rejeita-se a segunda possibilidade, já que (133) e (131) dão

$$G^\mu_\mu = (C_1 + 4C_2)R = -8\pi G T^\mu_\mu \quad (135)$$

E se $R_{;\nu} \equiv \frac{\partial R}{\partial x^\nu}$ vai a zero, então $\frac{\partial T^\mu_\mu}{\partial x^\nu}$ também deve ir a zero (que é o próprio caso da presença de matéria não-relativística inhomogênea). Conclue-se que $C_2 = -\frac{C_1}{2}$, e (133) se torna

$$G_{\mu\nu} = C_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) \quad (136)$$

Finalmente, usa-se (E) para fixar C_1 . Um sistema não-relativístico sempre tem $|T_{ij}| \ll |T_{00}|$, então, usando (136), tem-se

$$R_{ij} \simeq \frac{1}{2}g_{ij}R \quad (137)$$

Com um campo fraco tem-se $g_{\alpha\beta} \simeq \eta_{\alpha\beta}$ e o escalar de curvatura é dado por

$$R \simeq R_{kk} - R_{oo} \simeq \frac{3}{2}R - R_{00} \quad (138)$$

ou, ainda,

$$R \simeq 2R_{00} \quad (139)$$

Usando (139), (125) e (136), acha-se

$$G_{00} \simeq 2C_1R_{00} \quad (140)$$

Para calcular R_{00} de um campo fraco, usa-se a parte linear de $R_{\lambda\mu\nu\kappa}$ dada pela equação (117). Porém, quando o campo é estático, todas as derivadas temporais vão a zero, e têm-se

$$R_{0000} \simeq 0 \quad (141)$$

$$R_{i0j0} \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{00}}{\partial x^i \partial x^j} \quad (142)$$

E a equação (140) resulta em

$$G_{00} \simeq 2C_1(R_{i0i0} - R_{0000}) \simeq C_1\nabla^2 g_{00} \quad (143)$$

e comparando com (132), tem-se que (E) é satisfeito apenas se $C_1 = 1$.

Fazendo $C_1 = 1$ em (136) completa-se o cálculo de $G_{\mu\nu}$, o tensor de Einstein:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (144)$$

Tomando (144) junto a (131), tem-se, finalmente, as *equações de campo de Einstein*

$$\boxed{R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{\mu\nu}} \quad (145)$$

Uma forma alternativa de (145) é fazer a contração com $g^{\mu\nu}$, que dá

$$R - 2R = -8\pi GT_{\mu}^{\mu} \quad (146)$$

ou

$$R = 8\pi GT_{\mu}^{\mu} \quad (147)$$

Substituindo em (145), tem-se

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T_{\lambda}^{\lambda}) \quad (148)$$

que é uma forma equivalente de (145).

Por fim, ao analisar-se o caso no vácuo, $T_{\mu\nu}$ vai a zero e por (148), deduz-se as equações de campo de Einstein em um espaço vazio:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (149)$$

Em um espaço-tempo de 2 ou 3 dimensões, $g_{\mu\nu}$ não é dinâmico, portanto, apenas em 4 ou mais dimensões que o verdadeiro campo gravitacional pode existir no espaço vazio.

A primeira Aparição da Constante Cosmológica

Relaxando-se a condição (B), permite-se que $G_{\mu\nu}$ contenha termos com menos que duas derivadas da métrica. Como foi visto em "Curvatura", a liberdade para usar as primeiras derivadas não permite nenhum termo novo de $G_{\mu\nu}$. Porém, se é possível utilizar o tensor métrico, então um novo termo é possível, igual a $g_{\mu\nu}$ vezes uma constante λ , e as novas equações de campo serão

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (150)$$

Onde o termo $\lambda g_{\mu\nu}$ foi originalmente introduzido por Einstein para manter o universo estacionário e chamado de *constante cosmológica*. Esse termo satisfaz a (A), (C) e (D), mas não a (E), logo, λ deve ser bastante pequena para não interferir com a teoria de gravitação de Newton.

3.2 Teoria de Brans-Dike

A teoria formulada por Brans e Dike é inspirada nas idéias de Mach, de que a inércia de um corpo poderia mudar de acordo com a distribuição de matéria no universo, como efeito de um certo *campo cósmico*. A partir daí, pode-se obter a influência desse campo escalar ϕ nas equações de Einstein e estudar seu efeito em algumas predições da Relatividade Geral usual.

Segundo essa idéia, a *massa inercial* de várias partículas elementares poderia representar a interação com esse campo. Entretanto, suas massas também podem ser medidas pelas acelerações relativas Gm/r^2 , que nada têm a ver com a densidade ou distribuição de matéria no universo. A conclusão que se chega é a de que a constante gravitacional G deve ter alguma relação com o valor médio do campo ϕ . A equação de campo mais simples possível para ϕ é da forma

$$\square^2 \phi = 4\pi\lambda T_{M\mu}^{\mu} \quad (151)$$

onde $\square^2 \phi = g^{\mu\nu} \phi_{;\mu;\rho}$ é o d'Alembertiano invariante, λ é uma constante de acoplamento e $T_M^{\mu\nu}$ é o tensor de energia-momento da matéria no universo.

Usando valores da densidade e do raio do universo como $\rho \sim 10^{-29} gcm^{-3}$ e $R \sim 10^{28} cm$, respectivamente, é possível fazer uma estimativa do valor médio de ϕ

$$\langle \phi \rangle \sim \lambda \rho R^2 \sim \lambda \times 10^{27} g cm^{-1} \quad (152)$$

que é um resultado muito próximo do valor $\frac{1}{G} = 1,35 \cdot 10^{28} g cm^{-1}$. Então, normalizando ϕ ,

$$\langle \phi \rangle \simeq \frac{1}{G} \quad (153)$$

É importante notar que λ deve ser uma grandeza adimensional, não muito diferente de 1, e adotando uma postura mais realista, Brans e Dike cogitaram a possibilidade de que as equações de campo gravitacional corretas deveriam ser obtidas substituindo G por $1/\phi$ e incluindo o tensor de energia-momento $T_\phi^{\mu\nu}$ para a nova fonte de gravidade, o campo ϕ :

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = \frac{8\pi}{\phi}[T_M^{\mu\nu} + T_\phi^{\mu\nu}] \quad (154)$$

Porém, seguindo essa idéia, perde-se resultados muitos bons obtidos pelo Princípio de Equilavência, como, por exemplo, a igualdade das massas gravitacional e inercial. Para não abrir mão disso, Brans e Dike colocaram a restrição de que apenas $g_{\mu\nu}$ e não ϕ deve entrar nas equações de movimento de partículas e fótons. Assim, a equação que descreve a troca de energia entre matéria de gravitação permanece a mesma da teoria de Einstein:

$$T_M^\mu{}_{\nu;\mu} \equiv \frac{\partial T_M^\mu{}_\nu}{\partial x^\mu} + \Gamma_{\mu\rho}^\mu T_M^\rho{}_\nu - \Gamma_{\mu\nu}^\rho T_M^\mu{}_\rho = 0 \quad (155)$$

O lado esquerdo da equação (154) desaparece pela divergência covariante e, usando as identidades de Bianchi (122), então multiplicando por ϕ e tomando a divergência covariante (88), tem-se

$$(R_\nu^\mu - \frac{1}{2}\delta_\nu^\mu R)\phi_{;\mu} = -8\pi T_\phi^\mu{}_{\nu;\mu} \quad (156)$$

Com isso, determina-se completamente o tensor $T_\phi^\mu{}_\nu$. O tensor simétrico mais simples que pode ser construído com termos que envolvem uma ou duas derivadas do campo ϕ e do próprio ϕ é

$$T_\phi^\mu{}_\nu = A(\phi)\phi_{;\nu}^\mu\phi_{;\nu} + B(\phi)\delta_\nu^\mu\phi_{;\rho}\phi_{;\rho} + C(\phi)\phi_{;\nu}^\mu + \delta_\nu^\mu D(\phi)\square^2\phi \quad (157)$$

Que resulta em

$$\begin{aligned} T_\phi^\mu{}_{\nu;\mu} &= [A'(\phi) + B'(\phi)]\phi_{;\nu}^\mu\phi_{;\nu}\phi_{;\mu} \\ &+ [A(\phi) + D'(\phi)]\phi_{;\nu}\square^2\phi \\ &+ [A(\phi) + 2B(\phi) + C'(\phi)]\phi_{;\nu}^\mu\phi_{;\mu} \\ &+ D(\phi)(\square^2\phi)_{;\nu} + C(\phi)\square^2(\phi_{;\nu}) \end{aligned} \quad (158)$$

O primeiro termo da equação (156) é determinada pela equação (113) como

$$\phi_{;\rho}R_\nu^\sigma = \phi_{;\mu;\nu}^\mu - \phi_{;\nu;\mu}^\mu = (\square^2\phi)_{;\nu} - \square^2(\phi_{;\nu}) \quad (159)$$

E tomando o traço da (154) e usando a (151), encontra-se

$$R = \frac{8\pi}{\phi} \left\{ \frac{1}{4\pi\lambda} \square^2 \phi + (A(\phi) + 4B(\phi)) \phi_{;\mu}^{\mu} \phi_{;\mu} (C(\phi) + 4D(\phi)) \square^2 \phi \right\} \quad (160)$$

e, então, o lado esquerdo da (156) é

$$(R_{\nu}^{\mu} - \frac{1}{2} \delta_{\nu}^{\mu} R) \phi_{;\mu} = (\square^2 \phi)_{;\nu} - \square^2 (\phi_{;\nu}) - \frac{4\pi}{\phi} \phi_{;\nu} \left\{ \left(\frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4D(\phi) \right) \square^2 \phi + (A(\phi) + 4B(\phi)) \phi_{;\mu}^{\mu} \phi_{;\mu} \right\} \quad (161)$$

Comparando-se os coeficientes de $(\square^2 \phi)_{;\nu}$ e $\square^2 (\phi_{;\nu})$ e $\phi_{;\nu} \square^2 \phi$ e $\phi_{;\mu}^{\mu} \phi_{;\mu} \phi_{\nu}$ e $\phi_{;\nu}^{\mu} \phi_{;\mu}$ nas equações (159) e (161), tem-se que a (156) exige

$$\begin{aligned} 1 &= -8\pi D(\phi) \\ -1 &= -8\pi C(\phi) \\ -\frac{4\pi}{\phi} \left\{ \frac{1}{4\pi\lambda} + C(\phi) + 4D(\phi) \right\} &= -8\pi (A(\phi) + D'(\phi)) \\ -\frac{4\pi}{\phi} (A(\phi) + 4B(\phi)) &= -8\pi (A'(\phi) + B'(\phi)) \\ 0 &= A(\phi) + 2B(\phi) + C(\phi) \end{aligned}$$

A única solução é

$$\begin{aligned} A(\phi) &= \frac{\omega}{8\pi\phi}; & B(\phi) &= -\frac{\omega}{16\pi\phi}; \\ C(\phi) &= \frac{1}{8\pi}; & D(\phi) &= -\frac{1}{8\pi}. \end{aligned}$$

onde ω é uma constante adimensional conveniente dada por

$$\omega = \frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2}$$

ou

$$\lambda = \frac{2}{3 + 2\omega} \quad (162)$$

As equações de campo (151) e (154) agora ficam como

$$\square^2 \phi = \frac{8\pi}{3 + 2\omega} T_{M \mu}^{\mu} \quad (163)$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi}{\phi} T_{M\mu\nu} - \frac{\omega}{\phi^2} (\phi_{;\mu} \phi_{;\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \phi_{;\rho} \phi_{;\rho}) - \frac{1}{\phi} (\phi_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu} \square^2 \phi) \quad (164)$$

Como se quer que λ seja da ordem da unidade, espera-se, também, que ω também o seja. Mas se ω é muito maior que isso, então a (163) dá $\square^2\phi = 0(1/\omega)$, e assim

$$\phi = \langle \phi \rangle + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{G} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (165)$$

e por isso a (164) dá

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -8\pi GT_{M\mu\nu} + 0\left(\frac{1}{\omega}\right) \quad (166)$$

Assim a teoria de Brans-Dike recai na de Einstein para ω tendendo a infinito.

3.3 Condições de Coordenadas

O tensor de Einstein $G_{\mu\nu}$ tem 10 componentes independentes, logo, as equações de campo de Einstein (145) têm 10 equações algebricamente independentes. O tensor métrico desconhecido tem ainda 10 componentes independentes, e as equações de Einstein não são suficientes para determinar $g_{\mu\nu}$ univocamente. Apesar de algebricamente independentes, as 10 $G_{\mu\nu}$ são relacionadas por 4 identidades diferenciais, as identidades de Bianchi $G^{\mu}_{\nu;\mu} = 0$ (equação (123)). Assim, não há 10 equações independentes, mas apenas $10 - 4 = 6$, deixando quatro graus de liberdade em 10 valores desconhecidos de $g_{\mu\nu}$. Esses graus de liberdades correspondem ao fato de que se $g_{\mu\nu}$ é uma solução da equação de Einstein, então $g'_{\mu\nu}$ também é, onde $g'_{\mu\nu}$ é determinado de $g_{\mu\nu}$ por uma transformação geral de coordenadas $x \rightarrow x'$. E essa transformação de coordenadas envolve quatro funções arbitrárias $x'^{\mu}(x)$, dando as soluções de (145) apenas como graus de liberdade.

A falha das equações de Einstein para a determinação de $g_{\mu\nu}$ univocamente é quase como o caso das equações de Maxwell em determinar o potencial vetor A_{μ} univocamente. Quando escrita em termos do potencial vetor, as equações de Maxwell, a partir de (29) e (33), dão

$$\square^2 A_{\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} A^{\beta} = -J_{\alpha} \quad (167)$$

Há quatro equações para quatro variáveis, mas elas não determinam A_{α} univocamente, porque o lado esquerdo das igualdades são relacionados por uma identidade diferencial semelhante às identidades de Bianchi,

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(\square^2 A^{\alpha} - \frac{\partial^2}{\partial x_{\alpha} \partial x^{\beta}} A^{\beta} \right) \equiv 0 \quad (168)$$

Ou seja, há apenas um grau de liberdade na solução para os quatro A_{α} e esse grau de liberdade corresponde à invariância de gauge (dada qualquer solução A_{α} , pode-se achar outra solução $A'_{\alpha} \equiv A_{\alpha} + \partial\lambda/\partial x^{\alpha}$ com um λ arbitrário).

As ambigüidades nas soluções das equações de Maxwell e Einstein podem ser removidas usando "força bruta". No caso das equações de Maxwell, escolhe-se um gauge em particular, como o gauge de Lorentz. Da mesma forma, pode-se

eliminar a ambigüidade no tensor métrico adotando algum sistema de coordenadas em particular. A escolha de um sistema de coordenadas pode ser expresso em quatro condições de coordenadas que, quando adicionadas às seis equações independentes de Einstein, determinam uma equação sem qualquer ambigüidade.

Uma escolha particularmente conveniente de um sistema de coordenadas é representado por condições de coordenadas harmônicas,

$$\Gamma^\lambda \equiv g^{\mu\nu} \Gamma_{\mu\nu}^\lambda = 0 \quad (169)$$

Para ver que sempre é possível escolher um sistema de coordenadas em que isso é verdade, aplica-se as transformações das equações (70) e contrai-se com $g^{\mu\nu}$, de forma a achar

$$\Gamma'^\lambda = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho - g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} \quad (170)$$

Se Γ^ρ não vai a zero, pode-se sempre definir um novo sistema de coordenadas x'^λ resolvendo as equações diferenciais parciais de segunda-ordem, dando $\Gamma'^\lambda = 0$ no sistema x' .

$$g^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 x'^\lambda}{\partial x^\rho \partial x^\sigma} = \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\rho} \Gamma^\rho$$

As quatro condições em (169) não são geralmente covariantes, desde que suas funções são remover a ambigüidade no tensor métrico da covariância geral das equações de Einstein. Porém, ainda assim, pode-se escrevê-las de forma mais elegante expressando as (70) em termos do tensor métrico:

$$\Gamma^\lambda = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g^{\lambda\kappa} \left(\frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\kappa\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right)$$

Mas,

$$g^{\lambda\kappa} \frac{\partial g_{\kappa\mu}}{\partial x^\nu} = -g_{\kappa\nu} \frac{\partial g^{\lambda\kappa}}{\partial x^\nu}$$

e ainda (de forma equivalente a (44)):

$$\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} = -g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} g^{1/2}$$

Então, resulta-se que

$$\Gamma^\lambda = -g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} (g^{1/2} g^{\lambda\kappa}) \quad (171)$$

As condições de coordenadas harmônicas dão

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa} (g^{1/2} g^{\lambda\kappa}) = 0 \quad (172)$$

E, finalmente, a função ϕ é dita harmônica se $\square^2 \phi$ vai a zero, onde \square^2 é o d'Alembertiano invariante $\square^2 \phi \equiv (g^{\lambda\kappa} \phi_{,\lambda})_{,\kappa}$. Utilizando-se de (79), (88) e (171)

$$\square^2 \phi = g^{\lambda\kappa} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \Gamma^\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^\lambda} \quad (173)$$

Se $\Gamma^\lambda = 0$, as coordenadas são, elas próprias, funções harmônicas e tem-se, claramente, que

$$\square^2 x^\mu = 0 \quad (174)$$

Na falta de campos gravitacionais, o sistema de coordenadas harmônicas mais óbvio é o de Minkowski, no qual $g^{\lambda\kappa} = \eta^{\lambda\kappa}$ e $g = 1$, e tem-se que (172) é satisfeita trivialmente. Na presença de campos gravitacionais fracos, o sistema de coordenadas harmônico também pode ser aproximado a um Minkowskiano.

3.4 O Problema de Cauchy

Nesta sessão será apresentado o problema de valor inicial de Cauchy com as equações de Einstein. Se conhece-se $g_{\mu\nu}$ e $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ em todos os pontos do plano $x^0 = t$, pode-se tentar extrair das equações de campo uma fórmula para $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial (x^0)^2$ em todos os lugares onde $x^0 = t$. Pode-se, então, computar $g_{\mu\nu}$ e $\partial g_{\mu\nu}/\partial (x^0)$ para tempos $x^0 = t + \delta t$, podendo continuar o processo para obter $g_{\mu\nu}$ para todos os x^i e x^0 .

A princípio parece praticável, porque há 10 segundas derivadas e 10 equações de campo. Mas observando o lado esquerdo da expressão $G^{\mu\nu} \equiv R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R$ das equações de campo, as identidades de Bianchi (124) mostram que

$$\frac{\partial}{\partial x^0} G^{\mu 0} \equiv -\frac{\partial}{\partial x^i} G^{\mu i} - \Gamma_{\nu\lambda}^\mu G^{\lambda\nu} - \Gamma_{\nu\lambda}^\nu G^{\mu\lambda} \quad (175)$$

O lado direito não contém derivadas temporais superiores a $\partial^2/\partial (x^0)^2$, então o lado esquerdo também não deve conter e, portanto, $G^{\mu 0}$ não contém derivadas temporais maiores que $\partial/\partial x^0$. Dessa maneira, não há nada a dizer sobre a evolução temporal do campo gravitacional das quatro equações

$$G^{\mu 0} = -8\pi G T^{\mu 0} \quad (176)$$

Antes, essas equações devem ser impostas como condições iniciais, o que deixa apenas 6 equações

$$G^{ij} = -8\pi G T^{ij} \quad (177)$$

Quando se resolve essas equações com as 10 segundas derivadas $\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial (x^0)^2$, encontra-se quatro ambigüidades, as quais não são possíveis de se eliminar já que é sempre possível fazer transformações de coordenadas que não alteram $g_{\mu\nu}$ e $\partial g_{\mu\nu}/\partial x^0$ em $x^0 = t$ mas que alteram $g_{\mu\nu}$ em todos os outros pontos. Mais especificamente, o que se encontra é que (177) determina as seis $\partial^2 g^{ij}/\partial (x^0)^2$, mas deixa as outras quatro derivadas $\partial^2 g^{\mu 0}/\partial (x^0)^2$ indeterminadas. Essa ambigüidade pode ser removida pela imposição de quatro condições de coordenadas que consertam o sistema de coordenadas. Por exemplo, adotando-se o sistema

de coordenadas harmônico discutido na sessão anterior, a segunda derivada de $\sqrt{g}g^{\mu 0}$ pode ser determinada derivando a (172) com respeito ao tempo:

$$\frac{\partial^2}{\partial(x^0)^2}(\sqrt{g}g^{\mu 0}) = -\frac{\partial^2}{\partial x^0 \partial x^i} \sqrt{g}g^{\mu i} \quad (178)$$

e as 10 equações (177) e (178) são suficientes pra determinar todas as segundas derivadas temporais de $g_{\mu\nu}$.

Quando o problema de valor inicial é resolvido dessa forma, as condições (176) precisam ser impostas uma vez. As identidades de Bianchi e a conservação da energia e do momento mostram que sendo ou não satisfeitas, as equações de Einstein devem apresentar

$$(G^{\mu\nu} + 8\pi GT^{\mu\nu})_{;\nu} = 0 \quad (179)$$

Aplicando-se isso em $x^0 = t$, impondo-se (176) e determinando-se as segundas derivadas de (177), a quantidade entre parênteses será nula para todo $x^0 = t$. Dessa maneira, tem-se

$$\frac{\partial}{\partial x^0}(G^{\mu 0} + 8\pi GT^{\mu 0}) = 0 \quad (180)$$

e os campos calculados nos instantes posteriores $x^0 = t + dt$ irão automaticamente satisfazer as condições (176).

4 O Modelo Padrão da Cosmologia

4.1 O Princípio Cosmológico

A ciência moderna começa com a descoberta de que a Terra não está no centro do universo. O anti-anropocentrismo foi incorporado na mentalidade científica, de forma que, agora, não haveria mais quem sugerisse que a Terra, ou o sistema solar, ou a galáxia, ou o grupo local de galáxias, ocupassem qualquer posição privilegiada no cosmos.

Grande parte da teoria cosmológica é construída sobre o *Princípio Cosmológico*: a hipótese de que qualquer posição no universo é essencialmente equilavente, ou seja, em grandes escalas, o universo é considerado Homogêneo e Isotrópico. Ambos princípios são, certamente, uma consequência da uniformidade em que a matéria e a radiação estão distribuídas no universo.

Um espaço isotrópico é tal que todas as direções são equivalentes para qualquer lei fundamental da física como, por exemplo, a inércia de um corpo (que é independente das direções de movimento) ou o poder de atração de uma carga elétrica. Naturalmente, a homogeneidade do universo deve ser compreendida da mesma forma como a homogeneidade de um gás: isso não se aplica ao universo em detalhe, mas apenas a porções do universo de dimensões típicas de 10^8 ou 10^9 anos luz, que são grandes o suficiente para comportar diversos aglomerados de galáxias.

Um espaço homogêneo é aquele em que todas as regiões são equivalentes, i.e. que todas as leis da física são a mesma em todas as partes do cosmo. Matematicamente representa-se esse princípio pela covariância por translação dos eixos.

Além disso, aparentemente, o universo tem simetria esférica e, pelo Princípio Cosmológico, o universo particionado é anisotrópico em torno de todo ponto. A questão sobre o porquê da simetria esférica do universo e de sua homogeneidade em todo o tempo ainda permanece e, talvez, esse seja apenas um estado temporário na sua história. Existe a sugestão de que o universo poderia ter sido altamente anisotrópico no começo, mas essas anisotropias foram sendo suavizadas pela ação da viscosidade de neutrinos e outros efeitos dissipativos. Entretanto, mesmo nesse tipo de teoria, o universo foi altamente isotrópico e homogêneo em toda sua história acessível à observações astronômicas.

A verdadeira razão para o uso do Princípio Cosmológico não é a de que ele esteja inteiramente correto, mas que ele permite fazer uso das informações extremamente limitadas que se tem da observação astronômica. Se os dados não corresponderem às expectativas, pode-se, ao menos, concluir que tanto o Princípio de Equivalência quanto o Princípio Cosmológico estariam errados.

Uma extensão desse princípio é utilizado na teoria do estado estacionário, chamado *Princípio Cosmológico Perfeito* (descrito em capítulo adiante), que afirma que todos os observadores vêem a mesma estrutura do cosmo em todos os tempos. O dados observacionais refutam essa última teoria.

4.2 A Métrica Robertson-Walker

A métrica de Robertson-Walker é dada por

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t) \left\{ \frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right\} \quad (181)$$

onde $R(t)$ é uma função desconhecida do tempo, e k é uma constante que, por uma escolha conveniente de unidades para r , pode ter o valor de $+1$, 0 ou -1 (espaço finito-fechado, infinito-plano e infinito-aberto, respectivamente).

Uma visão mais clara acerca do comportamento da matéria sob a métrica de Robertson-Walker é obtida pela aplicação do Princípio Cosmológico nos tensores que descrevem o estado médio da matéria cósmica, como o tensor de energia-momento $T^{\mu\nu}$, e a corrente de galáxias J_G^μ (definida de maneira completamente análoga à corrente elétrica). Todos esses tensores devem ter sua forma invariante ante mudanças de coordenadas. Essas isometrias são puramente espaciais, transformando J_G^t e T^{tt} em 3-escalares, J_G^i e T^{it} em 3-vetores e T^{ij} em 3-tensores. Isto é, devem seguir as identidades abaixo:

$$J_G^t = n_G(t) \quad J_G^i = 0 \quad (182)$$

$$T_{tt} = \rho(t) \quad T_{it} = 0 \quad T_{ij} = g_{ij}p(t) \quad (183)$$

onde n_G , ρ e p são quantidades desconhecidas que podem depender de t , mas não das outras coordenadas.

Pode-se escrever esses resultados de maneira mais elegante com

$$J_G^\mu = n_G U^\mu \quad (184)$$

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} \quad (185)$$

onde U_μ é uma quadrivelocidade (como em (58)), tal que

$$U^t \equiv 1 \quad U^i \equiv 0 \quad (186)$$

A equação (186) mostra que o conteúdo do universo, em média, está em repouso no sistema de coordenadas (r, θ, ϕ) . A equação (185) mostra que o tensor energia-momento do universo tem a forma de um fluido perfeito já que o tensor energia momento de um fluido perfeito é dado por

$$T^{\epsilon\beta} = p\eta^{\alpha\beta} + (p + \rho)U^\alpha U^\beta \quad (187)$$

Por fim, sabe-se que o tensor de energia-momento do universo obedece a lei de conservação (equação (43)):

$$\begin{aligned} 0 &= T_{;\nu}^{\mu\nu} \\ &= \frac{\partial p}{\partial x^\nu} g^{\mu\nu} + g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \{g^{1/2}(\rho + p)U^\mu U^\nu\} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu (p + \rho)U^\nu U^\lambda \end{aligned} \quad (188)$$

Para $\mu = r, \theta, \phi$, a equação é satisfeita de forma trivial, enquanto que para $\mu = t$ tem-se

$$R^3(t) \frac{dp(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \{R^3(t)[\rho(t) + p(t)]\} \quad (189)$$

E, se a pressão da matéria cósmica é negligenciável (e ela é!), então (189) dará

$$R^3(t)\rho(t) = \text{constante} \quad (190)$$

4.3 O *Redshift*

O *redshift* ocorre quando a radiação eletromagnética que é emitida ou refletida por algum objeto no universo é deslocada para um comprimento de onda (λ) menor (que, pela equação de Planck, $E = h\nu$, é menos energética), como pode ser visto na figura (1).

$$z = \frac{\lambda_{\text{observado}} - \lambda_{\text{emitido}}}{\lambda_{\text{emitido}}} \quad (191)$$

Um exemplo simples de *redshift* observável é devido ao efeito Doppler Relativístico, que ocorre quando a luz se move em um referencial com velocidade diferente (v) de outro referencial onde está o observador e deve respeitar as transformações de Lorentz (que definem γ , equação (13)),

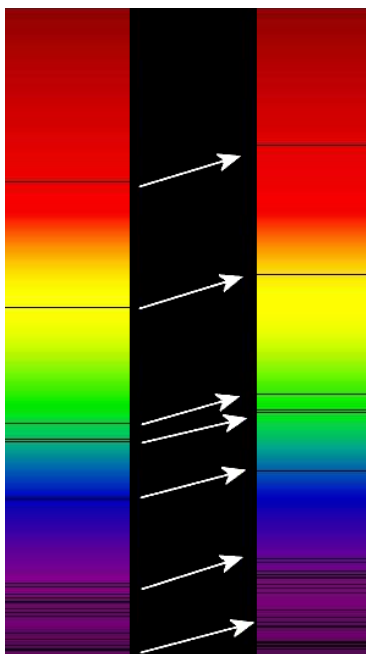


Figura 1: À direita: absorção de linhas no espectro óptico de um aglomerado de galáxias distantes. À esquerda: comparação com as linhas de espectro do sol [18].

$$z = \left(1 + \frac{v}{c}\right)\gamma - 1 \quad (192)$$

Outra causa diferente para o *redshift* é a própria expansão do universo (do fator de escala do universo $R(t)$), ou, mais genericamente, do substrato onde está o universo) que explica o fato observacional de que os *redshifts* de galáxias, quasares e nuvens intergaláticas, todas muito distantes, aumentam proporcionalmente às suas distâncias (lei de Hubble). Esse mecanismo é a chave do modelo do Big Bang. Esse *redshift* é dado por

$$z = \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \quad (193)$$

(onde t_0 significa o tempo atual no universo).

Por último, há *redshifts* gravitacionais, que são observados se o receptor está localizado em um potencial gravitacional muito maior do que a fonte. A causa desse fenômeno é dilatação temporal que ocorre perto de objetos massivos, de acordo com a Relatividade Geral (a derivação teórica é um efeito que é derivado da solução da métrica de Schwarzschild para as equações de Einstein e que está fora do escopo desse trabalho).

4.4 Contagem de números de fontes no Universo

As contagens numérica de fontes de rádio e ópticas são, de forma observacional, dadas em função da luminosidade aparente ou do *redshift* (como no programa Hubble, por exemplo). Com isso é possível comparar com predições teóricas e inferir parâmetros cosmológicos.

De maneira geral, assume-se que no instante t_1 existem $n(L, t_1) dL$ fontes por unidade de volume com luminosidade absoluta entre L e $L + dL$. O elemento de volume é

$$\begin{aligned} dV &= \sqrt{g} dr_1 d\theta_1 d\phi_1 \\ &= R^3(t_1)(1 - kr_1^2)^{-1/2} r_1^2 dr_1 \sin \theta_1 d\theta_1 d\phi_1 \end{aligned} \quad (194)$$

e, então, o número de fontes entre r_1 e $r_1 + dr_1$ com luminosidade absoluta entre L e $L + dL$ é

$$dN = 4\pi R^3(t_1)(1 - kr_1^2)^{-1/2} r_1^2 n(t_1, L) |dr_1| dL \quad (195)$$

As coordenadas r_1 e t_1 estão relacionadas como

$$r_1 = r(t_1) \quad (196)$$

onde $r(t)$ é uma função definida como

$$\int_t^{t_0} \frac{dt}{R(t)} \equiv \int_0^{r(t)} (1 - kr^2)^{-1/2} dr \quad (197)$$

Que derivando resultará

$$dr_1 = -(1 - kr_1^2)^{1/2} \frac{dt_1}{R(t_1)} \quad (198)$$

e a (194) pode ser escrita como

$$dN = 4\pi R^2(t_1) r^2(t_1) n(t_1, L) dt_1 dL \quad (199)$$

A maior informação sobre o fator de escala do universo ($R(t)$) é dado pela observação de desvios na frequência de luz emitida por fontes distantes. O *redshift* (z , da equação (193)) e a luminosidade aparente (l) de uma fonte de luminosidade absoluta L em r_1, t_1 são dadas por

$$\begin{aligned} z &= \frac{R(t_0)}{R(t_1)} - 1 \\ l &= \frac{LR^2(t_1)}{4\pi r_1^2 R^4(t_0)} \end{aligned} \quad (200)$$

Assim, o número de fontes, com *redshift* **menor** do que Z e luminosidade **maior** do que l , é dado pela integral de (199) em todo L e em um domínio finito de t_1 .

$$N(< z, l >) = \int_0^\infty dL \int_{\max(t_z, t_1(L))}^{t_0} 4\pi R^2(t_1) r^2(t_1) n(t_1, L) dt_1 \quad (201)$$

onde os limites inferiores, dados pelas condições no *redshift* e na luminosidade aparente, são definidos por

$$R(t_z) \equiv \frac{R(t_0)}{(1+z)} \quad (202)$$

$$\frac{r^2(t_l)}{R^2(t_l)} \equiv \frac{L}{4\pi l R^4(t_0)} \quad (203)$$

Se os *redshifts* não são observados, então a quantidade de interesse é o número $N(>1)$ de fontes com luminosidade aparente maior que l , que podem ser calculados com o limite inferior em (201) a ser exatamente $t_l(L)$. Se a luminosidade aparente não é observada, então a quantidade de interesse é o número $N(<z)$ de fontes com *redshift* menor que z , que podem ser calculadas tomando o limite inferior em (201) para ser apenas t_z .

4.5 O Estado Cosmológico Estacionário

O trabalho desenvolvido até então teve como base o Princípio Cosmológico, de que o universo é homogêneo e simetricamente esférico. Hermann Bondi e Thomas Gold foram um passo além, propondo que o universo obedece a um *Princípio Cosmológico Perfeito*, ou seja, permanece o mesmo não só em todos os pontos e em todas as direções, como também em *todos os tempos*. Essa proposta leva ao modelo de Estado Estacionário do Universo (Steady State).

A constante de Hubble (H_0) em função do fator de escala ($R(t)$) é um parâmetro observável e, dessa maneira, deve ser independente do tempo atual (t_0) no modelo em questão. Com H denotando o valor permanente da constante de Hubble, tem-se

$$\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} = H \quad (204)$$

e, assim,

$$R(t) = R(t_0)e^{H(t-t_0)} \quad (205)$$

Em geral, o parâmetro de desaceleração do universo é dado por

$$q_0 \equiv -\ddot{R}(t_0) \frac{R(t_0)}{\dot{R}^2(t_0)} \quad (206)$$

Nesse modelo, o parâmetro de desaceleração assume o valor permanente q

$$q \equiv -\frac{\ddot{R}R}{\dot{R}^2} = -1 \quad (207)$$

Para determinar k (constante que define o formato do universo), usa-se a relação geral entre $R(t)$ e a luminosidade-distância versus função red-shift $d_L(z)$

$$t_0 - t = \int_0^{[e^{H(t_0-t)}-1]} \frac{1}{1+z} \left[1 - \frac{k}{R^2(t_0)} \frac{1}{(1+z)^2} d_L^2(z) \right]^{\frac{1}{2}} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{1+z} d_L(z) \right] dz$$

Como $d_L(z)$ é um observável, ele deve agora ser independente de t_0 . Assim, para que a integral dependa apenas de $t - t_0$, não de t ou t_0 separadamente, é necessário que

$$k = 0 \quad (208)$$

E essa métrica, que é um caso especial de Robert-Walker, finalmente, resulta

$$d\tau^2 = dt^2 - R^2(t_0) e^{2H(t-t_0)} \{ dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \} \quad (209)$$

4.6 O Modelo Padrão da Cosmologia e seus Dilemas

O modelo padrão da cosmologia é baseado no Princípio Cosmológico e nas Equações de Einstein. O comportamento do modelo derivado da métrica de Robertson-Walker (181) prediz o futuro do universo, que depende criticamente de sua curvatura (k). Se o universo for aberto ($k = -1$), expandirá-se para sempre e se for fechado (com volume finito, $k = +1$), em algum momento se contrairá. Além disso, a curvatura depende da relação entre a densidade de energia presente, ρ_0 , e a densidade de energia crítica ²,

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (210)$$

Sendo que $\rho_c \simeq 1.9 \times 10^{-29} gcm^{-3}$, e o universo é considerado aberto se $\rho_0 < \rho_c$ e fechado se $\rho_0 > \rho_c$.

Inicialmente, ρ_0 deveria ser dado pela massa de repouso da matéria comum bariônica (Ω_b). Se fosse assim, o universo seria aberto se o fator de desaceleração, q_0 (equação (206)), fosse menor que $\frac{1}{2}$, ou fechado se ele fosse maior. Porém, as constatações observacionais garantem que $q_0 \approx 1$, criando um dilema com a densidade de massa observada nas galáxias, que é consideravelmente menor do que ρ_c . Fazendo-se que a densidade de massa atual do Universo seja escrita como [20],

$$\rho_0 = 1.9 \times 10^{-29} \Omega h_0 gcm^{-3} \quad \text{onde } h_0 = H_0/100 \quad (211)$$

²Essas são soluções generalizadas dos modelos de Friedmann-Lemaître, que serão introduzidos no próximo capítulo.

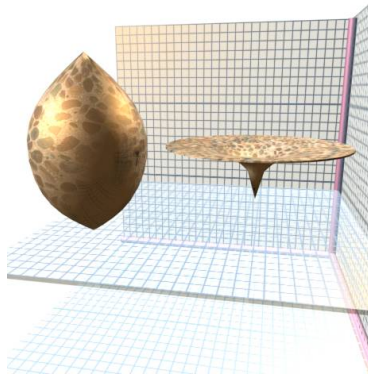


Figura 2: Universo fechado ou aberto [18].

Onde Ω indica a contribuição de todas as formas de matéria e energia do universo, e atribuindo-se as seguintes siglas: b = matéria bariônica e dm = matéria escura (*dark matter*), tem-se

$$\Omega = \frac{\rho_0}{\rho_c}$$

$$\Omega = \Omega_b + \Omega_{dm} + \Omega_{desconhecido} \quad (212)$$

A partir de observações, verifica-se que a matéria visível no Universo, na forma de galáxias e seus constituintes (estrelas, gás, poeira) correspondem a somente $\Omega = 0.05$ (figura 3 do próximo capítulo). Entretanto, há muita evidência da existência de matéria escura (Ω_{dm}), principalmente através de efeitos gravitacionais, que mostram, por exemplo:

- (1) que as galáxias espirais nas suas partes externas giram mais rapidamente do que o esperado se a matéria que as constituem fosse somente a visível;
- (2) que as galáxias dentro dos aglomerados também têm velocidades orbitais maiores do que a esperada se a massa total do aglomerado fosse somente a visível;
- (3) que aglomerados de galáxias se comportam como lentes gravitacionais com massa muito maior do que a estimada a partir da luz visível.

Assim, estima-se que a matéria escura corresponda a $\Omega_{dm} = 0.35$. Para $\Omega = 1$, ainda estariam faltando 0.6, o que poderia ser devido a uma constante cosmológica não nula, ou "energia escura", representado por Ω_{de} , ou ainda uma "quintessência", cuja contribuição seria representada por Ω_L , enquanto que a contribuição da matéria é representada por Ω_m .

Outro dilema importante que surge com o modelo padrão é que qualquer universo isotrópico, homogêneo e governado pelas equações de Einstein, deve ter se iniciado de uma singularidade de densidade infinita. Datando-se dessa

singulariedade, a idade do universo deve ser menor que H_0^{-1} (tempo de Hubble), e menor que $\frac{2}{3}H_0^{-1}$ se $q_0 > \frac{1}{2}$. Porém, medidas com datação radioativa e a teoria de evolução estelar não admitem idades muito menores que $\frac{2}{3}H_0^{-1}$.

Uma terceira questão se deve ao fato de que se é sabido que o universo é composto predominantemente de bárions, ao invés de antibárions. Pode-se fazer uma analogia da conservação do número bariônico com a conservação da carga elétrica e, sendo assim, o universo deveria ter um número igual de bárions e antibárions, assim como tem de cargas positivas e negativas. Porém, conhece-se uma lei para a conservação de carga elétrica (a primeira lei de Maxwell, equação (25)), mas não há nada que garanta e afirme algo semelhante para o número bariônico. Assim, de alguma forma, bárions e antibárions devem ter se separado em algum momento no passado, sem que se possa explicar tal fato com exatidão pelo modelo padrão.

Olhando por outro lado, um dos maiores triunfos do modelo padrão é uma relíquia do universo primitivo e quente: a radiação cósmica de fundo, prevista em 1950 e observada em 1965, que tem um comportamento perfeitamente isotrópico no universo, como um espectro de corpo-negro de Planck. Outra previsão que corresponde com a observação é abundância cósmica de He^4 .

A conclusão é que o modelo padrão da cosmologia pode estar parcialmente ou totalmente errado, abrindo espaço para outros modelos, como aquele que inclui a constante cosmológica, por exemplo, que se segue no próximo capítulo.

5 A Constante Cosmológica

5.1 O Problema da Falta de Energia no Universo

Tanto a análise numérica da formação de galáxias quanto uma série de observações (da fração de bárions em aglomerados de galáxias, do número de aglomerados em função do *redshift* e da dinâmica das galáxias) indicam que a matéria aglomerativa (bárions mais matéria escura) soma $30\% \pm 10\%$ da energia crítica [6, 7, 8]. Ou seja, se a densidade de energia total do universo é a crítica, então, em torno de 70% dessa energia está numa forma "escura" que não afeta a dinâmica de galáxias e de aglomerados de galáxias. Este é o assim chamado problema da *falta de energia*.

O problema da falta de energia se tornou mais evidente quando dois grupos independentes mediram as curvas de luminosidade de supernovas do tipo Ia [9]. Os resultados dos dois grupos indicam que o universo está atualmente se expandindo a uma taxa acelerada. Isso significa que o universo não é hoje dominado por matéria "normal", e sim por algum tipo de energia escura (Ω_{de}) cuja pressão negativa (na equação de estado, (245), $p = -\rho$) acelera a expansão do universo [10]. No universo recente, as observações de supernovas mostram que $\omega = -1_{-0.1}^{+0.1}$, [22], logo, a densidade é muito perto de uma constante cosmológica (figura 4).

Os argumentos a favor de uma componente de energia escura se tornaram ainda mais persuasivos com as últimas observações da **radiação cósmica de**

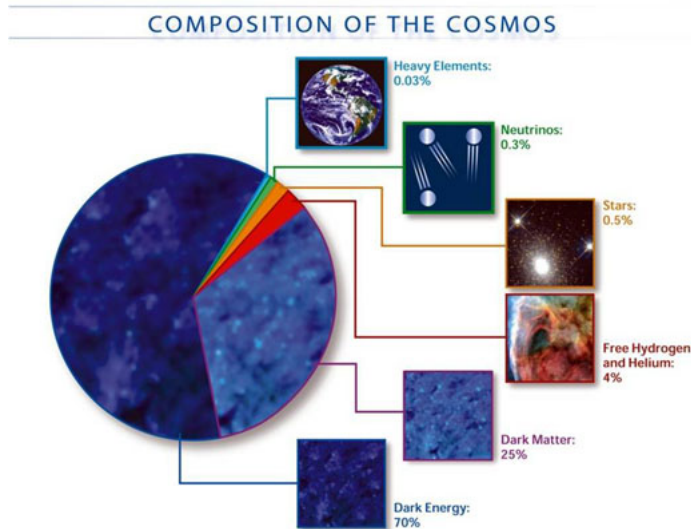


Figura 3: Atual composição do universo, deixando claro o problema da falta de energia [19].

fundo em microondas (RCF)[11, 12]. A localização do pico do espectro das anisotropias da RCF, medido com uma precisão de 10%, implica que a geometria do universo é aproximadamente plana [13] (figura 5).

Ou seja, existem três conjuntos de observações independentes que, combinados, constituem forte evidência da existência de energia escura:

- as observações de galáxias e aglomerados indicam que a matéria escura (Ω_{dm}) mais a bariônica (Ω_b) só respondem por 40% ou menos da densidade de energia crítica;
- as supernovas do tipo Ia indicam que mais de 50% da densidade de energia é escura;
- as anisotropias da RCF indicam que a densidade de energia total é aproximadamente igual à densidade crítica (significando um universo plano, de forma que é necessária mais alguma forma de energia-matéria para tornar $k = 0$ e $\Omega = 1$).

Essas observações implicam, portanto, que a densidade total do universo é quase idêntica à densidade crítica, $\Omega = \rho/\rho_c = 1.05 \pm 0.1$, onde um terço da densidade de energia corresponde a matéria normal ou escura, e dois terços correspondem à energia escura.

A candidata mais tradicional para o posto de energia escura é a *constante*

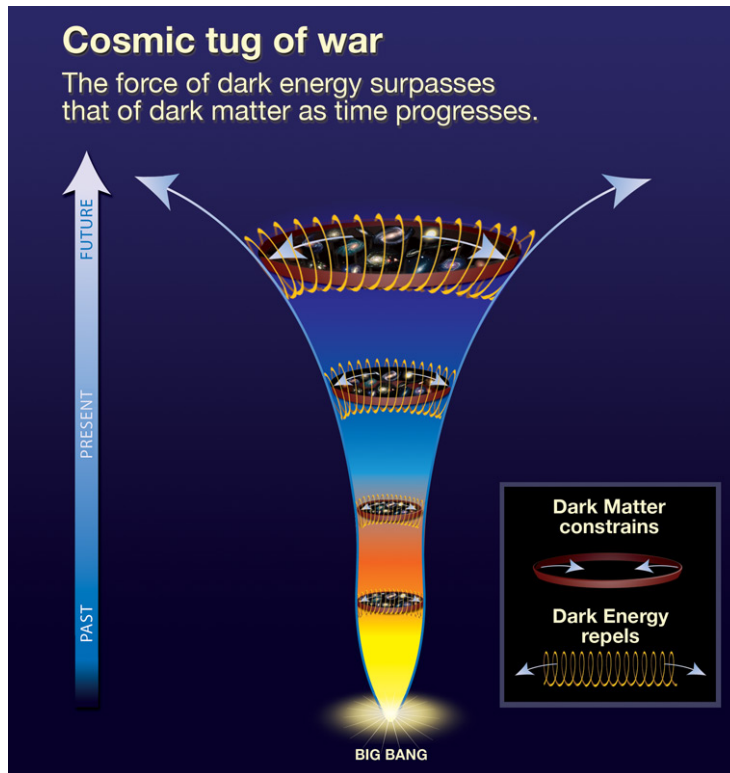


Figura 4: O diagrama mostra a provável evolução das componentes do universo desde o seu surgimento, no *Big Bang*, indicando que a força de repulsão (inverso à atração gravitacional) da energia escura aumenta com a evolução do tempo do universo. [23].

cosmológica, ou *energia de vácuo*. Uma constante cosmológica λ , cuja pressão $p_\lambda = -\rho_\lambda = -\lambda/(8\pi G)$ causa a aceleração da expansão do universo, poderia dar conta dos 70% da densidade de energia faltantes, sem interferir com a formação de galáxias (já que se trata de uma *constante* cosmológica, ela não possui nem induz inhomogeneidades nos outros campos de matéria).

Entretanto, a constante cosmológica padece de graves dificuldades [14, 15]:

- o problema do *ajuste fino*: a escala de energia de vácuo é dezenas de ordens (120!!!) de magnitude menor que as escalas conhecidas em física de partículas elementares.
- o *problema da coincidência*: por que a constante cosmológica estaria se tornando dominante justamente nesta época (nos últimos cinco bilhões de anos) e não em qualquer outra? Se ela dominasse qualquer outra época, não se formariam estruturas [3] no universo.

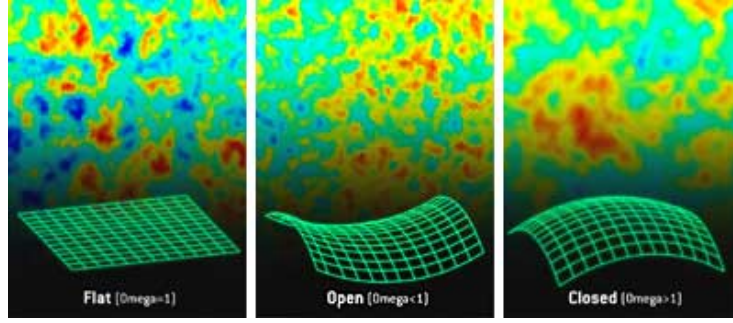


Figura 5: O diagrama mostra como deveria ser o fundo de microondas do universo nos três casos possíveis, o primeiro, correspondente a um universo plano (confirmado pelas observações), de forma que o universo tem a densidade crítica. Caso a massa do universo fosse muito maior, ou muito menor, o tamanho das regiões de diferentes temperaturas, que aparecem em azul e amarelo pareceria maior ou menor, respectivamente. [21].

5.2 Modelos com uma Constante Cosmológica

Quando Einstein formulou a teoria da Relatividade Geral, em 1916, acreditava que o universo era estático. Considerando suas equações em uma métrica para um universo isotrópico e homogêneo, ou seja, a forma dada pela métrica de Robertson-Walker (181):

$$g_{tt} = -1, \quad g_{it} = 0, \quad g_{kj} = R^2(t)\tilde{g}_{ij}(x) \quad (213)$$

Onde t é uma coordenada cósmica de tempo, i e j são as coordenadas espaciais comóveis (r, θ e φ), e \tilde{g}_{ij} é a métrica para o espaço maximalmente simétrico:

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{rr} &= (1 - kr^2)^{-1} \\ \tilde{g}_{\theta\theta} &= r^2 \\ \tilde{g}_{\varphi\varphi} &= r^2 \text{sen}^2\theta \\ \tilde{g}_{ij} &= 0, \quad \text{para } i \neq j \end{aligned} \quad (214)$$

com k igual a $+1$, -1 ou 0 .

Os únicos elementos que não vão a zero para essa métrica são

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^t &= R\dot{R}\tilde{g}_{ij} \\ \Gamma_{tj}^i &= \frac{\dot{R}}{R}\delta_j^i \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2}(\tilde{g}^{-1})^{il}\left(\frac{\partial\tilde{g}_{lj}}{\partial x^k} + \frac{\partial\tilde{g}_{lk}}{\partial x^j} - \frac{\partial\tilde{g}_{jk}}{\partial x^l}\right) \equiv \tilde{\Gamma}_{jk}^i \end{aligned} \quad (215)$$

Seus tensores de Ricci (equação (118))têm os elementos

$$\begin{aligned}
R_{tt} &= \frac{3\ddot{R}}{R} \\
R_{ti} &= 0 \\
R_{ij} &= \tilde{R}_{ij} - (R\ddot{R} + 2\dot{R}^2)\tilde{g}_{ij}
\end{aligned} \tag{216}$$

onde \tilde{R}_{ij} é o tensor de Ricci espacial calculado da métrica \tilde{g}_{ij}

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{\Gamma}_{ij}}{\partial x^k} + \tilde{\Gamma}_{li}^k \tilde{\Gamma}_{kj}^l - \tilde{\Gamma}_{ij}^k \tilde{\Gamma}_{kl}^l \tag{217}$$

Para não haver a necessidade de se calcular \tilde{R}_{ij} diretamente (o que daria muito trabalho), basta lembrar que \tilde{g}_{ij} é uma métrica de um espaço maximalmente simétrico e, dessa forma, o tensor de Ricci toma a forma de:

$$R_{\sigma\rho} = \frac{1}{N} g_{\sigma\rho} R^\lambda_\lambda \tag{218}$$

E assim tem-se:

$$\tilde{R}_{ij} = -2k\tilde{g}_{ij} \tag{219}$$

Juntamente com (216), tem-se as componentes do espaço - espaço de um tensor espaço - tempo de Ricci,

$$R_{ij} = -(R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k)\tilde{g}_{ij} \tag{220}$$

Mas o tensor energia-momento deve ter, como foi visto em (187), a forma de um fluido perfeito

$$T_{\mu\nu} = pg_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu \tag{221}$$

Onde p e ρ são funções de t , e U^μ é dado por (186). O termo que representa uma fonte nas equações de Einstein é, então,

$$\begin{aligned}
S_{\mu\nu} &\equiv T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T^\lambda_\lambda \\
S_{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(\rho - p)g_{\mu\nu} + (p + \rho)U_\mu U_\nu
\end{aligned} \tag{222}$$

E (213), (186) e (222) resultam em

$$S_{tt} = \frac{1}{2}(\rho + 3p) \tag{223}$$

$$S_{it} = 0 \tag{224}$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}(\rho - p)R^2\tilde{g}_{ij} \tag{225}$$

Finalmente, com as equações de Einstein (de (145)),

$$R_{\mu\nu} = -8\pi G S_{\mu\nu}$$

e juntando as equações (216), (220), (223), (224) e (225), a componente tempo-tempo resulta em

$$3\ddot{R} = -4\pi G(\rho + 3p)R \quad (226)$$

E a componente espaço-espaço,

$$R\ddot{R} + 2\dot{R}^2 + 2k = 4\pi G(\rho - p)R^2 \quad (227)$$

Por fim, a componente espaço-tempo resulta em 0.

Pode-se eliminar \ddot{R} de (226) e (227), e acha-se a equação diferencial de primeira ordem em $R(t)$:

$$\dot{R}^2 + k = \frac{8\pi G}{3}\rho R^2 \quad (228)$$

Além disso, lembrando-se da equação de conservação de energia (189),

$$\dot{p}R^3 = \frac{d}{dt}(R^3[\rho + p])$$

Ou, de forma equivalente,

$$\frac{d}{dR}(R^3\rho) = -3pR^2 \quad (229)$$

Tem-se uma equação de estado para $p = p(\rho)$, e pode-se determinar ρ em função de R . Se a densidade de energia do universo é dominado por matéria não-relativística com pressão quase nula, então (229) dá

$$\rho \propto R^{-3} \quad \text{para } p \ll \rho \quad (230)$$

e se a densidade de energia é dominada pelas partículas relativísticas, como os fótons, ou seja, radiação, então $p = \rho/3$ e (229) dará

$$\rho \propto R^{-4} \quad \text{para } p = \frac{\rho}{3} \quad (231)$$

Assim, retornando à teoria formulada por Einstein de um universo estático, de acordo com (226) e (227), o fator de escala $R(t)$ pode ser constante apenas se

$$\rho = -3p = \frac{3k}{8\pi GR^2}$$

O que exige que ou a densidade de energia ρ ou a pressão p devam ser *negativas*. Para evitar um resultado que não tivesse significado físico, Einstein modificou suas equações adicionando uma constante cosmológica λ , como já foi visto em (150), de forma que ainda preservasse a estrutura em que $T_{\mu\nu}$ é igual a um tensor que é contruído a partir de $g_{\mu\nu}$ e sua primeira e segunda derivadas, e é linear na segunda derivada de $g_{\mu\nu}$:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\rho{}_\rho - \lambda g_{\mu\nu} = -8\pi GT_{\mu\nu} \quad (232)$$

Mas, para o sentido cosmológico atual, fica mais conveniente trocar $\lambda g_{\mu\nu}$ de lado nas equações, movendo-o para o lado direito de (232). E, dessa forma, escreve-se

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R^\rho{}_\rho = -8\pi G\tilde{T}_{\mu\nu} \quad (233)$$

onde $\tilde{T}_{\mu\nu}$ é um tensor energia-momento modificado

$$\tilde{T}_{\mu\nu} \equiv T_{\mu\nu} - \frac{\lambda}{8\pi G}g_{\mu\nu} \quad (234)$$

Se $T_{\mu\nu}$ tem a forma de um fluido perfeito (como em (221)), então $\tilde{T}_{\mu\nu}$ também tem

$$\tilde{T}_{\mu\nu} = \tilde{p}g_{\mu\nu} + (\tilde{p} + \tilde{\rho})U_\mu U_\nu \quad (235)$$

Com uma densidade e pressão então modificada, definidas por

$$\tilde{p} = p - \frac{\lambda}{8\pi G} \quad \tilde{\rho} = \rho + \frac{\lambda}{8\pi G} \quad (236)$$

E toda a teoria previamente desenvolvida pode ser utilizada com a constante cosmológica, apenas substituindo as quantidades p e ρ por \tilde{p} e $\tilde{\rho}$.

Em particular, para um universo estático, tem-se,

$$\tilde{p} = -3\tilde{\rho} = \frac{3k}{8\pi GR^2} \quad (237)$$

E considerando que o universo fosse preenchido com "poeira", ou seja, matéria bariônica (Ω_b) que não exerce pressão, tem-se $p = 0$, e então

$$\frac{k}{R^2} = \lambda \quad (238)$$

$$\rho = \frac{\lambda}{4\pi G} \quad (239)$$

Mas, para ρ ser positiva, vê-se em (239) que λ deve ser positivo, e (238) diz que

$$k = +1 \quad (240)$$

e

$$R = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \quad (241)$$

O universo estático de Einstein era também finito, com uma curvatura positiva e uma densidade que eram fixas pelas constantes G e λ . Porém, como já foi exposto, a partir dos anos 1920, foram descobertas sistemáticas relações entre o *redshift* e as distâncias dos elementos do universo, de forma que o universo estático não foi mais considerado realista. Foi apenas recentemente que, com a descoberta de outros fatores de pressão e densidade no universo, que a

constante cosmológica se tornou uma possibilidade lógica para a dinâmica do universo. Pensando em modelos com pressão zero, tem-se que (229) resulta em ρR^3 constante, e é conveniente expressar essa constante em termos do valor que se teria em um universo Estático de Einstein:

$$\rho R^3 = \frac{\alpha}{4\pi G\sqrt{\lambda}} \quad (242)$$

E a equação dinâmica (228), com ρ substituída pela densidade modificada $\tilde{\rho}$ resulta em

$$\dot{R}^2 = \frac{1}{R} \left[\frac{\lambda R^3}{3} - kR + \frac{2\alpha}{3\sqrt{\lambda}} \right] \quad (243)$$

Assim, o comportamento de $R(t)$ nessa última equação (figura 6) depende de várias maneiras do fator do lado direito, e há três casos de interesse:

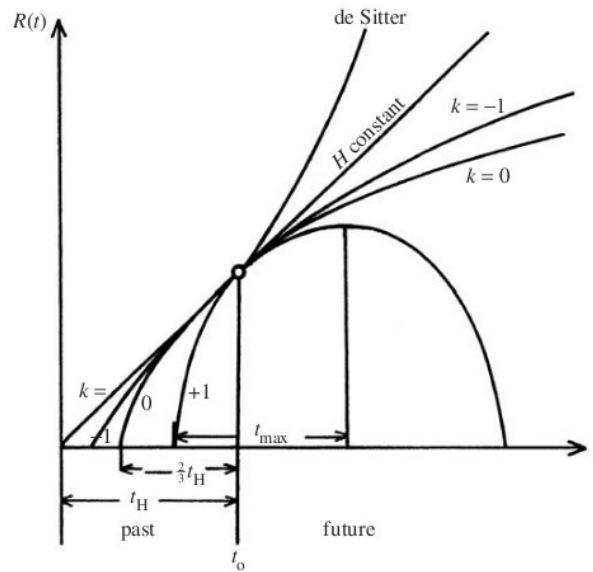


Figura 6: Escala de $R(t)$ (distância média entre as galáxias, por exemplo), dependente do tempo, em vários cenários. Com $H=H_0$ em $t=t_0$ (tempo atual), com $k = +1$ o universo seria fechado e finito (e colapsaria em algum futuro), com $k=-1$, o universo seria aberto e infinito, e com $k=0$, plano e infinito. O universo de de Sitter é um cenário exponencial com uma grande λ [2].

5.3 Constante Cosmológica Forte - Modelo de De Sitter

Incluindo nas equações (226) e (228) (que são as equações de Friedmann) o termo da constante cosmológica, tem-se

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) + \frac{\lambda}{3} \quad (244)$$

onde, para $p = \frac{\omega}{3}\rho$, pode-se escrever

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1 + \omega) + \frac{\lambda}{3} \quad (245)$$

E, a segunda equação,

$$H^2 \equiv \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{R^2} + \frac{\lambda}{3} \quad (246)$$

Supondo-se $\rho = k = 0$ (universo plano e sem matéria), tem-se que

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{\lambda}{3} \quad (247)$$

e também,

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\lambda}{3} \quad (248)$$

Nesse caso, as duas equações (que representam a velocidade e a aceleração do fator de escala $R(t)$) têm o mesmo termo nos seus respectivos lados direitos e, ainda, a aceleração é positiva. Para descobrir que tipo de densidade daria o mesmo resultado, faz-se $k = 0$ apenas,

$$H^2 = \left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (249)$$

e

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{8\pi G}{3}\rho \quad (250)$$

que é verdade apenas para $\omega = -3$ ou $p = -\rho$. Da equação de conservação $\dot{\rho} = -3H(\rho + p)$, isso só acontece se $\rho = \text{constante}$. Ou seja, uma densidade constante com a equação de estado $p = -\rho$ age exatamente a uma Constante Cosmológica. A solução é automaticamente uma inflação exponencial, chamada de modelo de **de Sitter**. Nesse modelo, o espaço é vazio e plano, tal que $k = \alpha = 0$, e $\lambda > 0$ (na verdade, além disso, a constante cosmológica deve ter um valor muito grande, tal que $\lambda \gg 1$, e chama-se de *Constante Cosmológica Forte*). A solução de (243) é simplesmente

$$R \propto e^{Ht} \quad (251)$$

$$H = \left(\frac{\lambda}{3}\right)^{1/2} \quad (252)$$

A métrica aqui é a mesma que em um modelo de estado estacionário com a diferença que, ao invés da matéria ser criada continuamente, apenas não há matéria. Assim, esse modelo não pode ser encarado como um modelo realista do universo, apesar de que, em última instância, todos os outros modelos cosmológicos tendem ao modelo de de Sitter para R tendendo ao infinito.

5.4 Constante Cosmológica Fraca

Em contrapartida ao modelo anterior, pode-se também haver densidades que dão uma aceleração positiva (i.e. inflação) mas não dão a mesma velocidade e aceleração nos lados direitos de (246) e (245). A aceleração é garantida se $\omega < -1$, o que dá $p < -1/3\rho$. Ou seja, pressão negativa resulta em inflação, porém, a inflação devido a $\omega < -1$ não será exponencial, mas um pouco mais fraca, e esse modelo chama-se de *Constante Cosmológica Fraca*. Essa constante é mais legítima a ser a constante cosmológica real, já que, diferentemente da *Forte*, ela pode variar, ou seja, $\lambda = 8\pi G\rho_{vacuo}$, pode variar.

5.5 Outros Modelos: Lemaître e Eddington-Lemaître

No modelo de *Lemaître*, o espaço é positivamente curvado, λ é positivo e há mais matéria presente do que em um modelo estático de Einstein. Tem-se que $k = +1$, e $\alpha > 1$.

De acordo com a equação (243), o fator de escala R se expande a partir de $t = 0$ com $t^{2/3}$, mas a expansão, então, vai lentamente, atingindo uma razão mínima em $R = \alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$ em que \dot{R} tem seu mínimo. Durante esse período, a equação diferencial (243) com $k = +1$ toma a seguinte aproximação

$$\dot{R}^2 \simeq \alpha^{2/3} - 1 + (\sqrt{\lambda}R - \alpha^{1/3})^2$$

E a solução é

$$R = \frac{\alpha^{1/3}}{\sqrt{\lambda}} [1 + (1 - \alpha^{-2/3})^{1/2} \sinh(\sqrt{\lambda}(t - t_m))] \quad (253)$$

onde t_m é o tempo em que \dot{R} chega ao seu mínimo. Se α é quase igual a 1, então R será quase igual ao valor do universo estático de Einstein para um tempo grande, na ordem de

$$\Delta t = \lambda^{-1/2} [\ln(1 - \alpha^{-2/3})] \quad (254)$$

O modelo de *Eddington-Lemaître* é o caso limite dos modelos de Lemaître. Tem a mesma curvatura e massa do modelo estático de Einstein ($k = +1$ e $\alpha = 1$), e se comporta como um modelo de Lemaître com um período infinitamente longo.

Assim, se em $t = 0$, tem-se $R = 0$, então R se aproxima assintoticamente ao valor de Einstein $1/\sqrt{\lambda}$ para $t \rightarrow \infty$. Por outro lado, se em $t = 0$ se tem $R = 1/\sqrt{\lambda}$, então R crescerá monotonicamente aproximando-se, no final, ao crescimento exponencial de de Sitter (251), causando um modelo de Einstein instável, já que se ele está sujeito a uma expansão ou contração infinitesimal, então R deve expandir ou contrair, com uma dependência no tempo dada pelo modelo de Eddington-Lemaître.

5.6 Qual é o modelo (a equação de estado) do universo?

O modelo de de Sitter só seria real se o universo não fosse preenchido por matéria, e sua importância, na verdade, dá-se para estágios muito novos da formação do universo. A chamada época da Inflação Cosmológica, quando o universo aumentou exponencialmente seu fator de escala em apenas alguns minutos de existência.

Por muitos anos, os dados observacionais dos *redshifts* de quasares em torno de $z \simeq 2$ despertaram interesse nos modelos de Friedman-Lemaître, já que parecia que havia um grande número desses quasares com valores do fator de escala $R \simeq R_0/3$, como se esperaria nesse modelo (já que os raios têm o valor particular de $\alpha^{1/3}/\sqrt{\lambda}$).

Porém, há cerca de 10 anos, com as descobertas observacionais das supernovas do tipo Ia (descoberta de que o universo está em expansão acelerada, hoje confirmada pelos dados do WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe, [25])) e o fato de que as anisotropias da RCF indicam que a densidade de energia total é aproximadamente igual à densidade crítica; provavelmente há ainda um termo que corresponde à pressão negativa.

Na figura 7, que é uma extensão atualizada da figura 6, as curvas mostram um universo fechado ($\Omega = 2$), um universo com densidade crítica ($\Omega = 1$), um universo vazio ($\Omega = 0$), um universo pelo Modelo Estacionário (steady state model) e, finalmente, os dados do WMAP ([25]) baseados no modelo com $\Omega_m = 0.27$ e $\Omega_{de} = 0.73$. Os dados mostram que o que mais se encaixa é um universo acelerado com baixos *redshifts* e desacelerado a altos *redshifts*, consistente com um modelo com uma constante cosmológica e uma quantidade significativa de matéria escura. Finalmente, olhando-se apenas para qual modelos os dados fitam melhor, o modelo de universo plano com energia e matéria escura (Λ CDM), tal que $\omega = -1$, parece o mais adequado.

Como a constante cosmológica hoje, se ela existir, deve ser positiva e pequena, é necessário compreender porque ela diminuiu tanto nestes 13.7 bilhões de anos do universo. Além disso, há o problema da coincidência: a densidade de matéria e a densidade de energia escura, hoje, são praticamente iguais e não há razão nenhuma para isso. Assim, não existe nenhuma teoria que explique todos esses fatos sobre a constante cosmológica, de forma que a questão da equação de estado do universo e da existência ou não da constante cosmológica ainda está em aberto, sendo uma das áreas atuais de estudos mais quentes na Física.

6 Conclusão

A evidência observacional de uma variedade de fontes freqüentemente apontam para um universo que é (pelo menos, aproximadamente) espacialmente plano, com $(\Omega_m, \Omega_{de}) \approx (0.3, 0.7)$. As condições de nucleossíntese (formação dos núcleos atômicos nos primeiros instantes do universo) implicam que $(\Omega_b) \approx (0.04)$ e, assim, a grande parte da matéria do universo está na forma não-bariônica.

Em tempos remotos, a constante cosmológica deveria ser um termo negli-

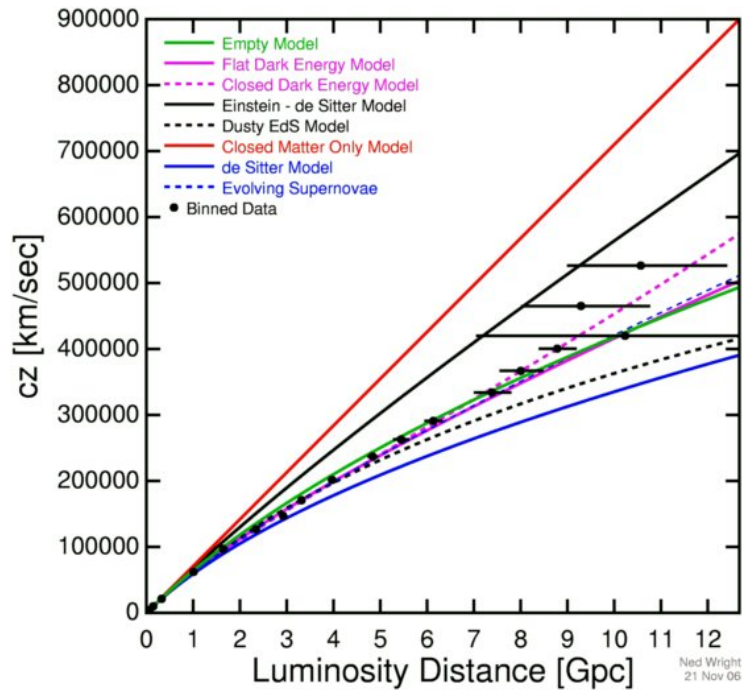


Figura 7: Vários grupos estão medindo as distâncias das supernovas com o objetivo de determinar se o universo é aberto ou fechado, medindo curvas no diagrama de Hubble. Nessa figura, observa-se a velocidade radial das supernovas vezes as suas distâncias. As linhas pontilhadas são modelos alternativos, como o modelo de Einstein-de Sitter, um modelo Λ CDM fechado e um modelo envolvendo supernovas [24].

genciável, enquanto em tempos posteriores, a densidade de matéria deveria ser aproximadamente zero e o universo vazio. Assim, a época atual é uma era bastante breve, cosmológicamente falando, tal que ambos, matéria e vácuo, são de magnitudes comparáveis. Na componente de matéria, há aparentemente contribuições de fontes bariônicas e não-bariônicas, ambas também comparáveis (já que suas razões independem do tempo).

Neste contexto, o que urge é determinar a equação de estado da energia escura, de forma a determinar se essa deve variar com o tempo ou não (confirmando ou rejeitando a constante cosmológica em relação ao campo escalar de uma quintessência). Mas também resta descobrir se há realmente alguma equação de estado efetiva de algum componente da energia escura no tensor energia momento ou essa é uma equação de estado forçada obtida pelos ajustes de dados de algum modelo de gravitação.

Além disso, novos tipos de experiências devem ser feitas, como por exemplo, achar que parâmetros da energia escura são necessários para a existência da constante cosmológica, e testá-los nas equações de estados de forma a determinar

um modelo dinâmico decisivo para os modelos da energia escura.

Um outro ângulo do problema é devido ao fato que, como foi visto, a Relatividade Geral prediz que o conteúdo de energia e massa do universo cria uma curvatura no espaço-tempo. Porém, se o espaço-tempo tem curvatura na ausência de fontes de massa e energia, e essa curvatura não é devida a energia de vácuo, então resta saber o que a gera. Considerando-se a constante cosmológica, o espaço-tempo tem uma curvatura intrínseca constante.

Assim, um dos grandes desafios científicos da era atual é justamente confirmar (ou refutar) e explicar esse cenário tão exótico, tornando, atualmente, a cosmologia uma área de pesquisa extremamente estimulante.

Referências

- [1] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology* (1972).
- [2] M. Roos, *An Introduction to Cosmology* (2003).
- [3] J. Horvath *et al.*, *Cosmologia Física* (2006)
- [4] J. W. Norbury, *General Relativity and Cosmology for Undergraduates* (2006)
- [5] Mustapha Ishak, *Remarks on the formulation of the cosmological constant/dark energy problem*, astro-ph/0504416v2.
- [6] S. White and M. Rees, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **183**:311 (1978); C. Frenk, S. White and M. Davis, *Nature* **317**: 595 (1985); 2dFGRS Team (Will J. Percival *et al.*), astro-ph/0206256.
- [7] J. Ostriker and P. Steinhardt, *Nature* **377**: 600 (1995).
- [8] N. Bahcall, J. Ostriker, S. Perlmutter and P. Steinhardt, *Science* **284**: 1481 (1999); L. Wang, R. Caldwell, J. Ostriker and P. Steinhardt, *Astrophys. J.* **530**: 17 (2000).
- [9] S. Perlmutter *et al.*, *Nature* **391**: 51 (1998); A. Riess *et al.*, *Astron. J.* **116**: 1009 (1998).
- [10] I. Waga and J. Friemann, *Phys. Rev.* **D62**: 043521 (2000); A. Balbi *et al.*, *Astrophys. J.* **547**: L89-L92 (2001).
- [11] P. de Bernardis *et al.*, *Nature* **404**: 955 (2000); C. Netterfield *et al.*, astro-ph/0104460.
- [12] S. Hanany *et al.*, *Astrophys. J.* **545**: 5 (2000).
- [13] A. Jaffe *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **86**: 3475-3479 (2001).
- [14] S. Weinberg, *Rev. Mod. Phys.* **61**:1 (1989).

- [15] S. Carroll, *Living Rev. Rel.* **4**: 1 (2001), astro-ph/0004075.
- [16] Página disponível em
<http://fma.if.usp.br/steinkirch/lectures/ProjetoMestrado.pdf>.
- [17] Página disponível em
<http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2001-1/index.html>, último acesso em 18/11/2007.
- [18] Página disponível em
<http://en.wikipedia.org/wiki/Cosmological-constant>, último acesso em 18/11/2007.
- [19] Página disponível em
<http://www.lsst.org/Science>, último acesso em 10/11/2007.
- [20] Página disponível em
<http://www.astro.queensu.ca/dursi>, último acesso em 10/11/2007.
- [21] Página disponível em
<http://www.if.ufrgs.br/thaisa/fis2003/darkenergy/darkenergy.html>, último acesso em 19/11/2007.
- [22] Página disponível em
<http://cosmicvariance.com/2006/11/16/dark-energy-has-long-been-dark-energy-like/>, último acesso em 19/11/2007.
- [23] Página disponível em
<http://hubblesite.org/newscenter/archive/releases/2006/52/image/d/>, último acesso em 19/11/2007.
- [24] Página disponível em
<http://arxiv.org/abs/astro-ph/0611572>, último acesso em 19/11/2007.
- [25] Página disponível em
<http://map.gsfc.nasa.gov/>, último acesso em 19/11/2007.